Sætning 9.32
Lad $F : U \to \mathbb{R}^m$ *være en funktion og lad* $x_0 \in U$*. Antag, at de partielt afledte af* F*'s koordinatfunktioner eksisterer i alle punkter i en åben kugle* $B_r(x_0) \subseteq U$*, og at de derved fremkomne funktioner*

$$\frac{\partial F_j}{\partial x_i} : B_r(x_0) \to \mathbb{R}, \quad j = 1, 2, \ldots, m, \ i = 1, 2, \ldots, n$$

alle er kontinuerte i x_0*. Så er* F *differentiabel i* x_0*.*

Sætning 9.34 (Kædereglen, 3. udgave)

Lad $U \subseteq \mathbb{R}^n$ og $V \subseteq \mathbb{R}^m$ være åbne mængder og lad $F : U \to \mathbb{R}^m$ og $G : V \to \mathbb{R}^k$ være to funktioner således, at $F(U) \subseteq V$. Lad $u \in U$ være et punkt, hvori F er differentiabel, og antag, at G er differentiabel i punktet $F(u) \in V$. Så er den sammensatte funktion $G \circ F : U \to \mathbb{R}^k$ differentiabel i u, og

$$D(G \circ F)(u) = DG(F(u))DF(u).$$

Sætning: Kædereglen

Korollar 9.18

Hvis $U \subseteq \mathbb{R}^n$ er en åben mængde og $f : U \to \mathbb{R}$ er en funktion, hvis blandede partielt afledte af anden orden findes på hele U og er kontinuerte funktioner, så er

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(z) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(z)$$

for alle $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ og alle $z \in U$.

Sætning:
ABC-kriteriet

Sætning 9.25 ($\boldsymbol{ABC}$-kriteriet)
Lad $D \subseteq \mathbb{R}^2$ og lad $f : D \to \mathbb{R}$ være en funktion. Antag, at $z_0 = (x_0, y_0) \in D$ er et kritisk punkt for f, dvs. at z_0 ligger i det indre af D og $\nabla f(z_0) = 0$. Antag yderligere, at de partielt afledte af f af anden orden eksisterer og er kontinuerte i en åben kugle $B_r(z_0)$. Sæt

$$A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(z_0), \quad B = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(z_0), \quad C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(z_0).$$

(a) *Hvis $B^2 > AC$, har f et saddelpunkt i z_0, og*

(b) *hvis $B^2 < AC$, har f et strengt lokalt ekstremum i z_0.*

Det lokale ekstremum i (b) er et strengt lokalt minimum, hvis $A > 0$ og $C > 0$, og det er et strengt lokalt maksimum, hvis $A < 0$ og $C < 0$ (A og C har samme fortegn, fordi $AC > 0$).

(c) *Hvis $B^2 = AC$, giver ABC-kriteriet ingen oplysning om f's opførsel i nærheden af z_0.*

Definition 9.27 (Differentiabilitet)
Lad U være en åben delmængde af $\mathbb{R}^n$ og $F : U \to \mathbb{R}^m$ en funktion. Lad $x_0 \in U$. Vi siger, at ***F er differentiabel i $\boldsymbol{x_0}$****, hvis der findes en lineær afbildning $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ og en o-funktion $\Phi : B_r(0) \to \mathbb{R}^m$ således, at*

$$F(x_0 + h) = F(x_0) + L(h) + \Phi(h)\,\|h\| \tag{9.38}$$

for alle $h \in B_r(0)$.

Vi siger, at F er ***differentiabel****, når F er differentiabel i ethvert punkt af U.*

Definition: Differentiabilitet

Sætning: Jacobi-matricen

Sætning 9.2 (Jacobi-matricen)
Lad U være en åben delmængde af $\mathbb{R}^n$ og $F : U \to \mathbb{R}^m$ en funktion. Hvis F er differentiabel i punktet $x_0 \in U$, så eksisterer de partielt afledte $\frac{\partial F_j}{\partial x_i}(x_0)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, af F's koordinatfunktioner F_j, og Jacobi-matricen for F i x_0 er givet ved

$$DF(x_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(x_0) & \frac{\partial F_1}{\partial x_2}(x_0) & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n}(x_0) \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1}(x_0) & \frac{\partial F_2}{\partial x_2}(x_0) & \cdots & \frac{\partial F_2}{\partial x_n}(x_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial x_1}(x_0) & \frac{\partial F_m}{\partial x_2}(x_0) & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial x_n}(x_0) \end{pmatrix}.$$

Sætning 1.1 (Taylors Sætning med restled)**.** *Lad* $k \in \mathbb{N}$*,* $x_0, x \in A \subset \mathbb{R}$*,* $x \neq x_0$ *og* $f\colon A \to \mathbb{R}$ *opfylde, at den* j*'te afledede* $f^{(j)}$ *af* f *eksisterer og er kontinuert på det lukkede interval mellem* x_0 *og* x *og differentiabel på det åbne interval mellem* x_0 *og* x *for alle* $j \leqslant k$*. Så findes et punkt* c *strengt mellem* x_0 *og* x *så*

$$f(x) = \sum_{j=0}^{k} \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!}(x - x_0)^j + \frac{f^{(k+1)}(c)}{(k+1)!}(x - x_0)^{k+1}. \tag{1}$$

Sætning 2.2 (Taylors Sætning med restled)**.** *Lad* $k \in \mathbb{N}$, $x_0, x \in A \subset \mathbb{R}^n$, $x \neq x_0$ *og* $f \colon A \to \mathbb{R}$ *opfylde, at* $\partial^\alpha f$ *eksisterer og er differentiabel på linjestykket* $L = \{(1-t)x_0 + tx \in \mathbb{R}^n \mid t \in [0,1]\}$ *mellem* x_0 *og* x *for* $|\alpha| \leqslant k$*. Så eksisterer et* $y \in \{(1-t)x_0 + tx \in \mathbb{R}^n \mid t \in (0,1)\}$ *så*

$$f(x) = \sum_{|\alpha| \leqslant k} \frac{\partial^\alpha f(x_0)}{\alpha!}(x - x_0)^\alpha + \sum_{|\alpha| = k+1} \frac{\partial^\alpha f(y)}{\alpha!}(x - x_0)^\alpha.$$

Definition 2.1 (Multi-indeks-notation)**.** Et *multi-indeks* er en n-tupel af ikke-negative heltal $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$. For to multi-indices $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n), \beta = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n) \in \mathbb{N}_0^n$ og et $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ defineres:

1. Sum/differens: $\alpha \pm \beta = (\alpha_1 \pm \beta_1, \alpha_2 \pm \beta_2, \ldots, \alpha_n \pm \beta_n)$.
2. Absolutværdi: $|\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i$.
3. Fakultet: $\alpha! = \prod_{i=1}^n \alpha_i!$.
4. Potens: $x^\alpha = \prod_{i=1}^n x_i^{\alpha_i}$.
5. Partielt afledet af højere orden: $\partial^\alpha = \prod_{i=1}^n \partial_i^{\alpha_i}$ hvor $\partial_i^{\alpha_i} = \frac{\partial^{\alpha_i}}{\partial x_i^{\alpha_i}}$.

Definition 3.2 (Taylorrække)**.** Lad $x_0 \in A \subset \mathbb{R}$ og $f\colon A \to \mathbb{R}$ være uendeligt ofte differentiabel. Så kaldes

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

for *Taylorrækken for* f *i punktet* x_0.

Definition 3.3 (Analytisk funktion)**.** Lad $A \subset \mathbb{R}$ og $f\colon A \to \mathbb{R}$ være uendeligt ofte differentiabel. Hvis der for ethvert $x_0 \in A$ findes et $R > 0$ så

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

for $x \in B_R(x_0)$, så kaldes f *(reel) analytisk.*

Sætning 4.6. *Antag at $A \subset \mathbb{R}^n$ er åben, at $f \in C^2(A)$, at $x_0 \in A$ er et kritisk punkt for f og at alle Hesse-matricen $H(x_0)$'s egenværdier er positive. Så er x_0 et lokalt minimumspunkt for f. Hvis alle $H(x_0)$'s egenværdier omvendt er negative, er x_0 et lokalt maksimumspunkt for f.*

Sætning 4.7. *Antag at* $A \subset \mathbb{R}^n$ *er åben, at* $f \in C^2(A)$*, at* $x_0 \in A$ *er et kritisk punkt for* f *og at Hesse-matricen* $H(x_0)$ *har både positive og negative egenværdier. Så er* x_0 *et saddelpunkt for* f*.*

Theorem 1.1. *We have that* $\exp(-x)\exp(x) = 1$ *and* $\exp(x) > 0$ *for all* $x \in \mathbb{R}$. *Moreover,* $\exp(a+b) = \exp(a)\exp(b)$ *for all* $a, b \in \mathbb{R}$. *Define the logarithm function*

$$\ln(x) := \int_1^x \frac{1}{t}\,dt, \quad x > 0.$$

Then we have $\ln(\exp(x)) = x$ *for all* $x \in \mathbb{R}$, *and* $\exp(\ln(x)) = x$ *for all* $x > 0$.

Corollary 1.2. *We have* $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$ *for all* $a, b > 0$. *Moreover,* $\ln(y^x) = x\ln(y)$ *for all* $y > 0$ *and* $x \in \mathbb{R}$. *Thus if* $y > 0$ *and* $x \in \mathbb{R}$*, we have* $y^x = \exp(x\ln(y))$.

Proof. Since

$$\exp(\ln(ab)) = ab = \exp(\ln(a))\exp(\ln(b)) = \exp(\ln(a) + \ln(b)),$$

Let $\{a_n\}_{n\geq 0} \subset \mathbb{R}$ such that $\limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} < \infty$. Define $r = 1/\{\limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n}\}$ if $\limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} > 0$ and $r = \infty$ if $\limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} = 0$.

Let $0 < R < r$ and define $f : (x_0 - R, x_0 + R) \mapsto \mathbb{R}$ given by:

$$f(x) := \sum_{n\geq 0} a_n (x - x_0)^n.$$

The series is absolutely convergent because $\limsup_{n\to\infty} |a_n(x - x_0)^n|^{1/n} = \frac{|x-x_0|}{r} < 1$.

Theorem 4.1. *Let $b \in (x_0 - R, x_0 + R)$ be an arbitrary point. Then f is indefinitely differentiable at b, and for every $t \in (x_0 - R, x_0 + R)$ with $|t - b| < R - |b - x_0|$ we have:*

$$f(t) = \sum_{m\geq 0} \frac{f^{(m)}(b)}{m!}(t - b)^m,$$

where the Taylor series is absolutely convergent.

Sætning 2.13 (Ækvivalens af kompakthed og følgekompakthed i metriske rum)**.** *Lad* (X, d) *være et metrisk rum og* $K \subset X$ *en delmængde. Så er* K *kompakt hvis og kun hvis* K *er følgekompakt.*

Theorem 5.2. *Let (X, d) be a complete metric space and $F : X \to X$ a contraction. Then F has a unique fixed point.*

Proposition 6.1. *Let (A, d) be a metric space, $(Y, ||\cdot||)$ a normed space, and H an arbitrary non-empty subset of A. We define*

$$B(H;Y) := \{f : H \to Y : \sup_{x\in H} ||f(x)|| < \infty\}.$$

Define $||\cdot||_\infty : B(H;Y) \to \mathbb{R}_+$, $\quad ||f||_\infty := \sup_{x\in H} ||f(x)||$. Then the space $(B(H;Y), ||\cdot||_\infty)$ is a normed space, and the map $d_\infty(f, g) := ||f - g||_\infty$ defines a metric.

Proposition 6.2. *Denote by* $C(H;Y)$ *the subset of* $B(H;Y)$ *where the functions are also continuous. Assume that* $(Y, ||\cdot||)$ *is a Banach space (a complete normed space). Then* $(C(H;Y), ||\cdot||_\infty)$ *is a Banach space, too.*

Sætning. *Lad* $I \subset \mathbb{R}$ *være et interval,* $U \subset \mathbb{R}^d$ *en åben mængde, og* $t_0 \in I$*,* $y_0 \in U$*,* $r_0, \delta_0 > 0$ *opfylde, at* $\overline{B_{r_0}}(y_0) \subset U$ *og* $[t_0 - \delta_0, t_0 + \delta_0] \subset I$*. Lad* $f\colon I \times U \to \mathbb{R}^d$ *være en kontinuert funktion, som opfylder følgende Lipschitz-betingelse på mængden* $H_0 = [t_0 - \delta_0, t_0 + \delta_0] \times \overline{B_{r_0}}(y_0)$*: der eksisterer et* $L > 0$ *så*

$$\|f(t,x) - f(t,y)\| \leqslant L\|x - y\| \qquad \forall t \in [t_0 - \delta_0, t_0 + \delta_0], \quad \forall x, y \in \overline{B_{r_0}}(y_0).$$

Definér $M = \sup_{(t,x)\in H_0} \|f(t,x)\|$ *og* $\delta_1 = \min\{\delta_0, \frac{r_0}{M}, L^{-1}\}$*. Så findes netop én løsning* $y\colon (t_0 - \delta_1, t_0 + \delta_1) \to \overline{B_{r_0}}(y_0)$ *til begyndelsesværdiproblemet*

$$y'(t) = f(t, y(t)), \quad y(t_0) = y_0.$$

Theorem 7.4. *Let $U \subset \mathbb{R}^d$ be an open set and $\mathbf{h} : U \mapsto \mathbb{R}^m$ be a $C^1(U;\mathbb{R}^m)$ function. Assume that there exists a point $\mathbf{a} = [\mathbf{u_a}, \mathbf{w_a}] \in U$ such that $\mathbf{h}(\mathbf{a}) = 0$ and the $m \times m$ partial Jacobi matrix $[D_\mathbf{u}\mathbf{h}(\mathbf{a})]$ is invertible. Then there exists an open set $E \subset \mathbb{R}^n$ containing $\mathbf{w_a}$ and a map $\mathbf{f} : E \mapsto \mathbb{R}^m$ which obeys $\mathbf{f}(\mathbf{w_a}) = \mathbf{u_a}$ and $\mathbf{h}([\mathbf{f}(\mathbf{w}), \mathbf{w}]) = 0$ for all $\mathbf{w} \in E$. Moreover, the matrix $[D_\mathbf{u}\mathbf{h}([\mathbf{f}(\mathbf{w}), \mathbf{w}])]$ is invertible if $\mathbf{w} \in E$ and all entries of its inverse are continuous on E. Finally, $\mathbf{f}$ is continuously differentiable on E and we have:*

$$[D\mathbf{f}(\mathbf{w})] = -[D_\mathbf{u}\mathbf{h}([\mathbf{f}(\mathbf{w}), \mathbf{w}])]^{-1}\,[D_\mathbf{w}\mathbf{h}([\mathbf{f}(\mathbf{w}), \mathbf{w}])] \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m), \quad \forall \mathbf{w} \in E. \tag{7.4}$$

Theorem 8.3. *Let $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^m$ be an open set containing $\mathbf{u}_0$. Let $\mathbf{g} \in C^1(\mathcal{O}; \mathbb{R}^m)$ such that $[D\mathbf{g}(\mathbf{u}_0)] \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$ is invertible, and $\mathbf{g}$ is injective on $\mathcal{O}$. Then there exists an open ball $E \subset \mathbb{R}^m$ which contains $\mathbf{w}_0 := \mathbf{g}(\mathbf{u}_0)$, and a function $\mathbf{f} : E \mapsto \mathcal{O}$ such that the following facts hold true:*

(i). The set $V = \mathbf{f}(E)$ equals $\mathbf{g}^{-1}(E)$ and is open in $\mathbb{R}^m$;
(ii). $\mathbf{g}(\mathbf{f}(\mathbf{w})) = \mathbf{w}$ on E and $\mathbf{f}(\mathbf{g}(\mathbf{u})) = \mathbf{u}$ on V, hence they are local inverses to each other;
(iii). The function $\mathbf{f}$ is a $C^1(V)$ function, $[D\mathbf{g}(\mathbf{f}(\mathbf{w}))]$ is invertible on E and we have:

$$[D\mathbf{f}(\mathbf{w})] = [D\mathbf{g}(\mathbf{f}(\mathbf{w}))]^{-1}.$$