Implicit givne og inverse funktioner

Morten Grud Rasmussen[1]
11. april 2016

1 Implicit givne funktioner

I lineær algebra har vi lært meget om at løse lineære ligningsystemer og om strukturen af løsningsmængden. Specielt ved vi, at hvis vi har flere ubekendte end ligninger, vil visse at disse ubekendte variable kunne betragtes som frie, og de øvrige kan udtrykkes ved de frie variable.

Vi skal nu se, hvordan man i en vis meget begrænset udstrækning kan generalisere dette billede til et generelt ikke-lineært ligningssystem. Vi skal betragte m ligninger i $m+n$ variable.

Lad m funktioner $f_1, f_2, \dots, f_m \colon \mathbb{R}^{m+n} \to \mathbb{R}$ være givet, og antag, at

$$(b_1, b_2, \dots, b_m, a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{m+n}$$

er en løsning til ligningerne

$$\begin{aligned}
f_1(y_1, y_2, \dots, y_m, x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0,\\
f_2(y_1, y_2, \dots, y_m, x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0,\\
f_3(y_1, y_2, \dots, y_m, x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0,\\
&\vdots\\
f_m(y_1, y_2, \dots, y_m, x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0,
\end{aligned}$$

Under hvilke omstændigheder kan vi finde funktioner $h_1, h_2, \dots, h_m$ af de n variable $x_1, x_2, \dots, x_n$ således at

$$h_i(a_1, a_2, \dots, a_n) = b_i$$

og

$$f_i(h_1(x_1, \dots, x_n), h_2(x_1, \dots, x_n), \dots, h_m(x_1, \dots, x_n), x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$$

for alle $i = 1, 2, \dots, m$, og for alle $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ i en omegn af $(a_1, a_2, \dots, a_n)$? Vi har jo m ligninger, og hvis vi betragter x_i'erne som kendte, kan vi jo have begrundet håb om, ved hjælp af ligningerne at kunne fastlægge de sidste m variable som kontinuerte funktioner af $x_1, x_2, \dots, x_n$. En mere komprimeret måde at formulere dette spørgsmål på er følgende: Givet en funktion $F \colon \mathbb{R}^{m+n} \to \mathbb{R}^m$ og vektorer $a \in \mathbb{R}^n$ og $b \in \mathbb{R}^m$, som opfylder at $F(b, a) = 0$ hvornår kan man finde en kontinuert funktion h, defineret i en lille kugle omkring a, således at $h(a) = b$, og $F(h(x), x) = 0$ for alle x i denne lille kugle?

Det er præcist denne situation den generelle version af sætningen om implicit givne funktioner udtaler sig om.

[1]Disse noter er en nødtørftig bearbejdning af et uddrag af 3. version af noterne *Supplement til Matematik 1GB* fra 2002 af Jan Philip Solovej, skrevet til brug på kurset Matematik 1 Grundkursus B ved Københavns Universitet som et supplement til bogen *Funktioner af en og flere variable* af Ebbe Thue Poulsen. Tak til Jan Philip Solovej for tilladelse til at bruge materialet. Ansvaret for materialet i disse noter ligger dog udelukkende hos undertegnede.

Sætning 1 (Implicit givne funktioner – generel version)**.** *Lad $U \subseteq \mathbb{R}^{m+n}$ være en åben mængde og $F\colon U \to \mathbb{R}^m$ være en kontinuert differentiabel funktion med koordinatfunktionerne*

$$F(y,x) = (F_1(y,x), F_2(y,x), \ldots, F_m(y,x)), x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^m.$$

Antag at $a \in \mathbb{R}^n, b \in \mathbb{R}^m$ opfylder $(b,a) \in U$, $F(b,a) = 0$ og at determinanten

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1}(b,a) & \frac{\partial F_1}{\partial y_2}(b,a) & \frac{\partial F_1}{\partial y_3}(b,a) & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial y_m}(b,a) \\ \frac{\partial F_2}{\partial y_1}(b,a) & \frac{\partial F_2}{\partial y_2}(b,a) & \frac{\partial F_2}{\partial y_3}(b,a) & \dots & \frac{\partial F_2}{\partial y_m}(b,a) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial y_1}(b,a) & \frac{\partial F_m}{\partial y_2}(b,a) & \frac{\partial F_m}{\partial y_3}(b,a) & \dots & \frac{\partial F_m}{\partial y_m}(b,a) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Så findes en åben kugle, $B_{\delta_1}(a) \subseteq \mathbb{R}^n$ med radius $\delta_1 > 0$ og centrum i a og en åben kugle, $B_{\delta_2}(b) \subseteq \mathbb{R}^m$ med radius $\delta_2 > 0$ og centrum i b samt en kontinuert differentiabel funktion $H\colon B_{\delta_1}(a) \to B_{\delta_2}(b)$, så vi for alle $x \in B_{\delta_1}(a)$ har

$$y \in B_{\delta_2}(b), \quad F(y,x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y = H(x).$$

Specielt er $H(a) = b$.

Vi skal ikke give beviset for denne sætning her. Fra lineær algebra vides at kravet i sætningen om, at determinanten af

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1}(b,a) & \frac{\partial F_1}{\partial y_2}(b,a) & \frac{\partial F_1}{\partial y_3}(b,a) & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial y_m}(b,a) \\ \frac{\partial F_2}{\partial y_1}(b,a) & \frac{\partial F_2}{\partial y_2}(b,a) & \frac{\partial F_2}{\partial y_3}(b,a) & \dots & \frac{\partial F_2}{\partial y_m}(b,a) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial y_1}(b,a) & \frac{\partial F_m}{\partial y_2}(b,a) & \frac{\partial F_m}{\partial y_3}(b,a) & \dots & \frac{\partial F_m}{\partial y_m}(b,a) \end{pmatrix}$$

skal være forskellig fra 0, er ækvivalent med at forlange, at denne $m \times m$-matrix er invertibel. Vi overlader det til læseren at overbevise sig om, at det i tilfældet, hvor F er en lineær funktion, præcis betyder, at $x_1, \ldots, x_n$ er frie variable og $y_1, \ldots, y_m$ er ledende variable i ligningssystemet $F(y_1, \ldots, y_m, x_1, \ldots, x_n) = 0$.

Sætning 2 (Tilfældet $m = 1$ og implicit differentiation)**.** *Lad $U \subseteq \mathbb{R}^{1+n}$ være en åben mængde og lad $f\colon U \to \mathbb{R}$ være en kontinuert differentiabel funktion som vi skriver $(y, x_1, \ldots, x_n) \mapsto f(y, x_1, \ldots, x_n)$. Antag at $(b, a_1, \ldots, a_n) \in U$, $f(b, a_1, \ldots, a_n) = 0$ og at den partielt afledte*

$$\frac{\partial}{\partial y} f(b, a_1, \ldots, a_n) \neq 0.$$

Da findes en åben kugle, $B_{\delta_1}(a) \subseteq \mathbb{R}^n$ med radius $\delta_1 > 0$ omkring a og et åbent interval, $(b-\delta_2, b+\delta_2)$ af længde $2\delta_2 > 0$ med centrum i b samt en kontinuert differentiabel funktion $h\colon B_{\delta_1}(a) \to (b-\delta_2, b+\delta_2)$, så vi for alle $(x_1, \ldots, x_n) \in B_{\delta_1}(a)$ har

$$y \in (b - \delta_2, b + \delta_2), \quad f(y, x_1, \ldots, x_n) = 0 \Leftrightarrow y = h(x_1, \ldots, x_n).$$

Specielt er $h(a_1, \ldots, a_n) = b$. Desuden gælder for $(x_1, \ldots, x_n) \in B_{\delta_1}(a)$, at

$$\frac{\partial h}{\partial x_j}(x_1, \ldots, x_n) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x_j}(h(x_1, \ldots, x_n), x_1, \ldots, x_n)}{\frac{\partial f}{\partial y}(h(x_1, \ldots, x_n), x_1, \ldots, x_n)}. \tag{1}$$

Bevis. Eksistensen af h følger fra Sætning 1. Vi mangler blot at vise (1). Hvis vi benytter at $f(h(x_1, \ldots, x_n), x_1, \ldots, x_n) = 0$ for alle $(x_1, \ldots, x_n) \in B_{\delta_1}(a)$ får vi fra Kædereglen[2], at

$$\begin{aligned}
0 =& \frac{\partial}{\partial x_j}\Big(f(x_1, \ldots, x_n, h(x_1, \ldots, x_n))\Big) \\
=& \frac{\partial f}{\partial x_j}\left(x_1, \ldots, x_n, h\left(x_1, \ldots, x_n\right)\right) \\
&+ \frac{\partial f}{\partial y}(x_1, \ldots, x_n, h(x_1, \ldots, x_n))\frac{\partial h}{\partial x_j}(x_1, \ldots, x_n).
\end{aligned}$$

Ligning (1) følger ved at løse for $\frac{\partial h}{\partial x_j}$ ovenfor. Bemærk, at man kan antage, at kuglen $B_{\delta_1}(a)$ er valgt så nævneren i (1) ikke er 0. Det er fordi nævneren er kontinuert, da f er kontinuert differentiabel og h er kontinuert, og nævneren per antagelse ikke er 0, når $(x_1, ..., x_n) = (a_1, ..., a_n)$. $\square$

Bemærk at man kan benytte (1) til at bestemme $\frac{\partial h}{\partial x_j}(a_1, \ldots, a_n)$ da man ved, at $h(a_1, \ldots, a_n) = b$. Man finder altså de partielt afledte af h, selvom man faktisk ikke kender funktionen fuldstændigt nær a. Man taler derfor om *implicit differentiation*. Man benytter ofte en notation, hvor man udelader h og skriver $y = y(x_1, \ldots, x_n)$. Beviset for implicit differentiation følger da fra den mere kompakte udregning

$$0 = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(f(y, x_1, \ldots, x_n)\right) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(y, x_1, \ldots, x_n) + \frac{\partial f}{\partial y}(y, x_1, \ldots, x_n)\frac{\partial y}{\partial x_j}.$$

Bemærkning 3 (Niveaukurver/flader er kurver/flader)**.** Lad $a \in L_c(f) \subseteq \mathbb{R}^n$ være et punkt på en niveaumængde for en kontinuert differentiabel funktion f af n variable, hvor $\nabla f(a) \neq 0$. Da vil mindst en af de partielt afledte $\frac{\partial}{\partial x_j}f(a)$, $j = 1, \ldots, n$ være forskellig fra nul. Vi kan for nemheds skyld antage, at $\frac{\partial}{\partial x_n}f(a) \neq 0$. Det følger da fra Sætning 2 om implicit givne funktioner, brugt på funktionen $x \mapsto f(x) - c$, at der findes $\delta_1, \delta_2 > 0$ og en kontinuert differentiabel funktion

$$h\colon B_{\delta_1}(a_1, \ldots, a_{n-1}) \to (a_n - \delta_2, a_n + \delta_2),$$

så der for alle $(x_1, \ldots, x_{n-1}) \in B_{\delta_1}(a_1, \ldots, a_{n-1})$ gælder, at

$$x_n \in (a_n - \delta_2, a_n + \delta_2), \quad f(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n) = c \Leftrightarrow x_n = h(x_1, \ldots, x_{n-1}).$$

(Bemærk at vi før kaldte a_n for b.) Denne påstand siger simpelthen, at mængden

$$B_{\delta_1}(a_1, \ldots, a_{n-1}) \times (a_n - \delta_2, a_n + \delta_2) \bigcap L_c(f)$$

er grafen for funktionen h. I tilfældet $n = 2$ ved vi, at denne graf er en kurve og i tilfældet $n = 3$, at den er en flade.

[2]Se *Funktioner af en og flere variable* Sætning 9.14.

Eksempel 4. Lad
$$F(y,x) = \sin(xy) - y.$$
Da $x = \pi/2$ og $y = 1$ løser ligningen $\sin(xy) - y = 0$ har vi at $F(1, \pi/2) = 0$. Desuden er
$$\frac{\partial F}{\partial y}(y,x) = \cos(xy)\, x - 1,$$
så $\frac{\partial F}{\partial y}(1, \pi/2) = -1 \neq 0$. Vi kan derfor bruge Sætning 2 til at konkludere, at der findes et $\varepsilon > 0$ og en kontinuert differentiabel funktion $h\colon (\pi/2 - \varepsilon, \pi/2 + \varepsilon) \to \mathbb{R}$ som opfylder at $h(\pi/2) = 1$ og
$$\sin(xh(x)) = h(x), x \in (\pi/2 - \varepsilon, \pi/2 + \varepsilon).$$
Desuden vil
$$h'(x) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(h(x), x)}{\frac{\partial F}{\partial y}(h(x), x)} = -\frac{\cos(xh(x))\, h(x)}{\cos(xh(x))\, x - 1}.$$
Da $h(\pi/2) = 1$ har vi at $h'(\pi/2) = 0$. Da h er kontinuert differentiabel ser vi fra udtrykket for $h'(x)$, at h' også er kontinuert differentiabel i nærheden af $\pi/2$ (sålænge $\cos(xh(x))\, x - 1 \neq 0$). D.v.s. at h er to gange kontinuert differentiabel. Vi kan beregne
$$\begin{aligned} h''(x) &= -\frac{h'(x)\left(\sin(xh(x))\, h(x)\, x + \cos^2(xh(x))\, x - \cos(xh(x))\right)}{\left(\cos(xh(x))\, x - 1\right)^2} \\ &\quad -\frac{\sin(xh(x))\, h(x)^2 - \cos^2(xh(x))\, h(x)}{\left(\cos(xh(x))\, x - 1\right)^2}. \end{aligned}$$
Hvis vi benytter $h(\pi/2) = 1$ og $h'(\pi/2) = 0$ finder vi $h''(\pi/2) = -1$. På samme måde kan man se, at h er vilkårligt ofte kontinuert differentiabel i nærheden af $\pi/2$ og man kan beregne alle de højere afledte af h i $\pi/2$.

2 Inverse funktioner

Det er velkendt,[3] at hvis en funktion f af en variabel har en invers eller omvendt funktion $g = f^{-1}$ og f er differentiabel i a og g er differentiabel i $f(a)$, da vil
$$g'(f(a)) = \frac{1}{f'(a)}. \tag{2}$$
Vi skal nu benytte Sætning 1 om implicit givne funktioner til at vise et endda mere generelt resultat for funktioner af flere variable.

Sætning 5 (Sætningen om inverse funktioner)**.** *Lad $F\colon U \to \mathbb{R}^n$ være en kontinuert differentiabel funktion defineret på en åben mængde $U \subseteq \mathbb{R}^n$. Antag at der i punktet $a \in U$ gælder, at*
$$\det DF(a) \neq 0, \tag{3}$$

[3] Se Afsnit 7.2 i *Funktioner af en og flere variable.*

altså, at Jacobi-matricen[4] *i a er invertibel.*

Der findes da $\delta_1, \delta_2 > 0$ og en kontinuert differentiabel funktion

$$G\colon B_{\delta_1}(F(a)) \to B_{\delta_2}(a),$$

så der for alle $y \in B_{\delta_1}(F(a))$ gælder

$$x \in B_{\delta_2}(a), \quad y = F(x) \Leftrightarrow x = G(y). \tag{4}$$

Man udtrykker dette ved, at F i nærheden af a har en invers G defineret nær $F(a)$.

Desuden gælder, at Jacobi-matricen $DG(F(a))$ er givet ved

$$DG(F(a)) = DF(a)^{-1}. \tag{5}$$

Bemærk at i tilfældet af en variabel reducerer denne relation simpelthen til (2).

Bevis. Vi definerer funktionen $\mathbb{F}\colon U \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ved $\mathbb{F}(x, y) = F(x) - y$. Mængden af punkter (x, y), hvor $y = F(x)$ kan udtrykkes som $\mathbb{F}(x, y) = 0$. Vi vil benytte Sætning 1 på funktionen $\mathbb{F}$.

Da vi ønsker at udtrykke x som funktion af y, spiller x og y de omvendte roller her sammenlignet med Sætning 1. Vi bemærker, at antagelsen (3) svarer til antagelsen om, at determinanten er forskellig fra 0 i Sætning 1. Eksistensen af G er da en direkte konsekvens af denne sætning.

Vi mangler blot at vise (5). Da F er kontinuert, findes der et $\delta > 0$ så $\delta < \delta_2$ og

$$\|x - a\| < \delta \Rightarrow \|F(x) - F(a)\| < \delta_1.$$

For alle x så $\|x - a\| < \delta$ gælder derfor, at $y = F(x) \in B_{\delta_1}(F(a))$. Vi kan derfor benytte (4) til at konkludere, at

$$G(F(x)) = x.$$

Hvis vi benytter Kædereglen for vektorfunktioner[5] finder vi, da Jacobi-matricen for identitetsafbildningen $x \mapsto x$ er identitetsmatricen I, at

$$DG(F(a))DF(a) = I,$$

hvilket giver (5). □

Eksempel 6. Betragt funktionen $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ givet ved

$$F(x, y) = (\exp(x) + yx, \sin(y) + x^2).$$

Vi ønsker at vise, at F nær $(x, y) = (0, 0)$ har en invers G defineret nær $F(0, 0) = (1, 0)$ og at finde $DG(1, 0)$. Vi udregner

$$DF(x, y) = \begin{pmatrix} \exp(x) + y & x \\ 2x & \cos(y) \end{pmatrix}.$$

Derfor er determinanten $|DF(x, y)| = (\exp(x) + y)\cos(y) - 2x^2$ og $|DF(0, 0)| = 1$. Eksistensen af G følger af Sætning 5 og ligeledes finder vi, at

$$DG(1, 0) = DF(0, 0)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

[4]Se Definition 9.32 og Sætning 9.33 i *Funktioner af en og flere variable*

[5]I *Funktioner af en og flere variable* er det Sætning 9.36 (3. udgave af kædereglen).

2.1 Opgaver

Opgave 1. Gør rede for, at der findes et $\varepsilon > 0$ og en kontinuert differentiabel funktion $f\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}$, således at $f(0) = 0$, og

$$e^{f(x)} \cos(x) = \cos^2(f(x)), x \in (-\varepsilon, \varepsilon).$$

Find desuden $f'(0)$.

Opgave 2. Gør rede for, at der findes et $\varepsilon > 0$ og en kontinuert differentiabel funktion $\varphi\colon (1-\varepsilon, 1+\varepsilon) \to \mathbb{R}$, således, at $\varphi(1) = 0$ og

$$e^{x^2\varphi(x)} = x, x \in (1-\varepsilon, 1+\varepsilon).$$

Bestem desuden $\varphi'(1)$. Argumenter for at φ er to gange kontinuert differentiabel nær 1 og find $\varphi''(1)$.

Opgave 3. Gør rede for, at der findes et $\varepsilon > 0$ og en kontinuert differentiabel funktion $\varphi\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}$ således at $\varphi(0) = 0$ og

$$\ln(x + \varphi(x) + 1) + 1 = \cos(\varphi(x)), x \in (-\varepsilon, \varepsilon).$$

Bestem desuden $\varphi'(0)$.

Opgave 4. Gør rede for at der findes en åben kugle B omkring punktet $(1, 0)$ i $\mathbb{R}^2$ og en kontinuert differentiabel funktion $h\colon B \to \mathbb{R}$ så $h(1, 0) = 0$ og

$$x_2 \exp(x_1 h(x_1, x_2)^2) = x_1 h(x_1, x_2).$$

Bestem desuden $\frac{\partial h}{\partial x_1}(1, 0)$ og $\frac{\partial h}{\partial x_2}(1, 0)$.

Opgave 5. Gør rede for at der findes et $\varepsilon > 0$ og to kontinuert differentiable funktioner $f, g\colon (1-\varepsilon, 1+\varepsilon) \to \mathbb{R}$, således at $f(1) = 1, g(1) = \frac{\pi}{2}$, og

$$x^2 f(x) \sin(g(x)) = f(x)^3, \cos(g(x)) = f(x)^3 - 1,$$

for alle $x \in (1-\varepsilon, 1+\varepsilon)$. Bestem desuden $f'(1)$ og $g'(1)$.

Opgave 6. Gør rede for at der findes et $\varepsilon > 0$ og to kontinuert differentiable funktioner $f, g\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}$, således at $f(0) = g(0) = 0$ og

$$e^{f(x)} \cos(g(x)) = x + 1, f(x) - g(x) = x^2,$$

for alle $x \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Bestem desuden $f'(0)$ og $g'(0)$.

Opgave 7. Bevis Sætning 5 direkte for funktioner af én variabel, altså i tilfældet $n = 1$.[6]

[6] Vink: Benyt Sætningerne 5.23, 7.8 og 7.14 i *Funktioner af en og flere variable.*