14. april 2018

Analyse 2

Forår 2018

Ugeseddel 12 – Uge 16

I sidste uge beviste vi sætningen om implicit givne funktioner.

Syttende kursusgang: Tirsdag d. 17. april kl. 12:30 til 16:15

12:30–14:15: Forelæsning

14:30–16:15: Opgaveregning i grupperum

Vi viser sætningen om inverse funktioner, svarende til kapitel 8 i Horias noter. Bemærk, at takket være Lemma 8.2 er antagelsen om, at g er invertibel på $\mathcal{O}$, overflødig.

Øvelser: Regn opgave 4, 5 og 6 i Horias opgavesæt om implicit givne - og inverse funktioner.

Attende kursusgang: Torsdag d. 19. april kl. 12:30 til 16:15

12:30–14:15: Forelæsning

14:30–16:15: Opgaveregning i grupperum

Vi begynder forfra og gennemgår hele pensum.

Øvelser: Vi har et udestående med de trigonometriske funktioner, som vi kan få afsluttet ved at løse nedenstående opgave.

Opgave. I Opgave 2 i Horias opgavesæt om differentialligninger har I vist, at hvis $\|f(t,x)\| \leqslant C\|x\|$ for alle $t \in \mathbb{R}$ og $x \in \mathbb{R}^d$ og $f \in C^1(\mathbb{R}^{1+d})$, så findes netop én *global* løsning til begyndelsesværdiproblemet $y'(t) = f(t, y(t))$, $y(t_0) = y_0$, hvor $t_0 \in \mathbb{R}$ og $y_0 \in \mathbb{R}^d$ er konstanter, og *global* betyder, at løsningen y er defineret på hele $\mathbb{R}$.

Definér funktionen $f\colon \mathbb{R}^{1+2} \to \mathbb{R}^2$ ved $f(t,(x_1,x_2)) = (-x_2, x_1)$.

1. Vis, at $f \in C^1(\mathbb{R}^{1+2})$ og at der eksisterer en positiv konstant C, så $\|f(t,x)\| \leqslant C\|x\|$.
2. Vis, at hvis $\tau(t) = (c(t), s(t))$ er løsningen til $\tau'(t) = f(t, \tau(t))$ med $\tau(0) = (1,0)$, så er $c''(t) = -s'(t) = -c(t)$, $s''(t) = c'(t) = -s(t)$ og $c^2(t)+s^2(t) = 1$ (idiotformlen) for alle $t \in \mathbb{R}$. Vink: Da $c^2(0)+s^2(0) = 1$ er det for den sidste identitet nok at vise, at $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ givet ved $g(t) = c^2(t) + s^2(t)$ er konstant.
3. Vis, at alle andre løsninger til $y'(t) = f(t, y(t))$ kan skrives på formen $y(t) = (ac(t) - bs(t), as(t) + bc(t))$, hvor c og s er som ovenfor og $a, b \in \mathbb{R}$ opfylder at $y(0) = (a, b)$. Vink: Brug entydighedsdelen af eksistens- og entydighedsresultatet.
4. Vis, at $\tau_k\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ givet ved $\tau_k(t) = \tau(t+k)$ løser differentialligningen $\tau_k'(t) = f(t, \tau_k(t))$ med begyndelsesbetingelsen $\tau_k(0) = (c(k), s(k))$. Konkludér vha. ovenstående delopgave, at $c(t+k) = c(k)c(t) - s(k)s(t)$ og $s(t+k) = s(k)c(t) + c(k)s(t)$. Disse formler kalder vi for additionsformlerne. Specielt gælder dobbeltvinkelformlerne $c(2t) = c^2(t) - s^2(t)$ og $s(2t) = 2s(t)c(t)$.
5. Vis, at $-1 \leqslant c(t), s(t) \leqslant 1$ for alle $t \in \mathbb{R}$.
6. Vis, at der findes $t_1 > 0$, så $c(t_1) = 0$ eller $s(t_1) = 0$. Vink: Bemærk, at hvis t er maksimum eller minimum for c, så er $s(t) = 0$ – og tilsvarende med s og c byttet rundt. Antag for modstrid, at der *ikke* findes et $t_1 > 0$, så $s(t_1) = 0$ eller $c(t_1) = 0$. Vis, at så er c og s begge monotone (og begrænsede jf. ovenstående delopgave), og må derfor konvergere asymptotisk mod hver sin grænse for $t \to \infty$. Udnyt dette til at opnå en modstrid med at $c^2(t) + s^2(t) = 1$ for alle $t \in \mathbb{R}$.
7. Lad $t_1 > 0$ opfylde, at $c(t_1) = 0$ eller $s(t_1) = 0$. Sæt $t_2 = 2t_1$, hvis $c(t_1) = 0$ og $t_2 = t_1$, hvis $s(t_1) = 0$. Definér funktionen $\tau_{2t_2}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ved $\tau_{2t_2}(t) = (c(t+2t_2), s(t+2t_2))$. Brug dobbeltvinkelformlerne (med $t = 0$), idiotformlen og entydighed til at vise, at $\tau = \tau_{2t_2}$. Hermed er det vist, at τ – og dermed c og s – er periodiske med periode $2t_2$.
8. Lad p betegne fundamentalperioden (den mindste, positive periode) for τ og definér $\pi = \frac{p}{2}$. Brug dobbeltvinkelformlerne, idiotformlen og entydighed til at vise at $c(\pi) = -1$, $s(\pi) = 0$, $c(\frac{\pi}{2}) = 0$ og $s(\frac{\pi}{2}) = 1$. Konkludér, at s er positiv på $(0, \pi)$. Vink: I skal selvfølgelig udnytte, at p er den *mindste*, positive periode for τ – disse identiteter gælder jo eksempelvis ikke med π erstattet af 2π! Begynd med at vise, at $c(\pi) = \pm 1$ og $s(\pi) = 0$, og vis derefter, at $c(\pi) \neq 1$ (pga. entydighed).
9. Brug additionsformlerne til at vise identiteterne $s(t + \pi) = -s(t)$,

$c(t+\pi) = -c(t)$, $c(t) = s(t+\frac{\pi}{2})$ og $c^2(t) = \frac{1}{2}(1+c(2t))$.

10. Bemærk, at arealet A af enhedscirklen kan udtrykkes som integralet $4\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$. Brug dette og substitutionen $x = s(t)$ til at udregne $A = \pi$. Vink: Det er ikke helt åbenlyst – kløø på! Du er nået hertil...

Næste uge – uge 17 – går vi så småt i træningslejr til eksamen.

Med venlig hilsen
Morten Grud Rasmussen