29. marts 2019

Analyse 2

Forår 2019

Ugeseddel 9 – Uge 14

I sidste uge afsluttede vi beviset for sætningen om implicit givne funktioner.

Sekstende kursusgang: Tirsdag d. 2. april kl. 12:30 til 16:15

12:30–14:15: Forelæsning

14:30–16:15: Opgaveregning i grupperum

Vi viser sætningen om inverse funktioner, svarende til kapitel 8 i Horias noter. Bemærk, at takket være Lemma 8.2 er antagelsen om, at g er invertibel på $\mathcal{O}$, overflødig.

Øvelser: Regn opgave 4, 5 og 6 i Horias opgavesæt om implicit givne - og inverse funktioner.

Syttende kursusgang: Torsdag d. 4. april kl. 12:30 til 16:15

12:30–16:15: Selvstudium

Vi har et udestående med de trigonometriske funktioner, som vi kan få afsluttet ved at løse nedenstående opgave. Desuden er der der opgaven med at præsentere en del af pensum, som ikke alle er færdige med endnu.

Opgave. I Opgave 2 i Horias opgavesæt om differentialligninger har I vist, at hvis $\|f(t,x)\| \leqslant C\|x\|$ for alle $t \in \mathbb{R}$ og $x \in \mathbb{R}^d$ og $f \in C^1(\mathbb{R}^{1+d})$, så findes netop én *global* løsning til begyndelsesværdiproblemet $y'(t) = f(t, y(t))$, $y(t_0) = y_0$, hvor $t_0 \in \mathbb{R}$ og $y_0 \in \mathbb{R}^d$ er konstanter, og *global* betyder, at løsningen y er defineret på hele $\mathbb{R}$.

Definér funktionen $f\colon \mathbb{R}^{1+2} \to \mathbb{R}^2$ ved $f(t,(x_1,x_2)) = (-x_2, x_1)$.

1. Vis, at $f \in C^1(\mathbb{R}^{1+2})$ og at der eksisterer en positiv konstant C, så $\|f(t,x)\| \leqslant C\|x\|$.
2. Vis, at hvis $\tau(t) = (c(t), s(t))$ er løsningen til $\tau'(t) = f(t, \tau(t))$ med $\tau(0) = (1,0)$, så er $c''(t) = -s'(t) = -c(t)$, $s''(t) = c'(t) = -s(t)$ og $c^2(t)+s^2(t) = 1$ (idiotformlen) for alle $t \in \mathbb{R}$. Vink: Da $c^2(0)+s^2(0) = 1$ er det for den sidste identitet nok at vise, at $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ givet ved $g(t) = c^2(t) + s^2(t)$ er konstant.
3. Vis, at alle andre løsninger til $y'(t) = f(t, y(t))$ kan skrives på formen $y(t) = (ac(t) - bs(t), as(t) + bc(t))$, hvor c og s er som ovenfor og $a, b \in \mathbb{R}$ opfylder at $y(0) = (a, b)$. Vink: Brug entydighedsdelen af eksistens- og entydighedsresultatet.
4. Vis, at $\tau_k\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ givet ved $\tau_k(t) = \tau(t+k)$ løser differentialligningen $\tau_k'(t) = f(t, \tau_k(t))$ med begyndelsesbetingelsen $\tau_k(0) = (c(k), s(k))$. Konkludér vha. ovenstående delopgave, at $c(t+k) = c(k)c(t) - s(k)s(t)$ og $s(t+k) = s(k)c(t) + c(k)s(t)$. Disse formler kalder vi for additionsformlerne. Specielt gælder dobbeltvinkelformlerne $c(2t) = c^2(t) - s^2(t)$ og $s(2t) = 2s(t)c(t)$.
5. Vis, at $-1 \leqslant c(t), s(t) \leqslant 1$ for alle $t \in \mathbb{R}$.
6. Vis, at der findes $t_1 > 0$, så $c(t_1) = 0$ eller $s(t_1) = 0$. Vink: Bemærk, at hvis t er maksimum eller minimum for c, så er $s(t) = 0$ – og tilsvarende med s og c byttet rundt. Antag for modstrid, at der *ikke* findes et $t_1 > 0$, så $s(t_1) = 0$ eller $c(t_1) = 0$. Vis, at så er c og s begge monotone (og begrænsede jf. ovenstående delopgave), og må derfor konvergere asymptotisk mod hver sin grænse for $t \to \infty$. Udnyt dette til at opnå en modstrid med at $c^2(t) + s^2(t) = 1$ for alle $t \in \mathbb{R}$.
7. Lad $t_1 > 0$ opfylde, at $c(t_1) = 0$ eller $s(t_1) = 0$. Sæt $t_2 = 2t_1$, hvis $c(t_1) = 0$ og $t_2 = t_1$, hvis $s(t_1) = 0$. Definér funktionen $\tau_{2t_2}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ved $\tau_{2t_2}(t) = (c(t+2t_2), s(t+2t_2))$. Brug dobbeltvinkelformlerne (med $t = 0$), idiotformlen og entydighed til at vise, at $\tau = \tau_{2t_2}$. Hermed er det vist, at τ – og dermed c og s – er periodiske med periode $2t_2$.
8. Lad p betegne fundamentalperioden (den mindste, positive periode) for τ og definér $\pi = \frac{p}{2}$. Brug dobbeltvinkelformlerne, idiotformlen og entydighed til at vise at $c(\pi) = -1$, $s(\pi) = 0$, $c(\frac{\pi}{2}) = 0$ og $s(\frac{\pi}{2}) = 1$. Konkludér, at s er positiv på $(0, \pi)$. Vink: I skal selvfølgelig udnytte, at p er den *mindste*, positive periode for τ – disse identiteter gælder jo eksempelvis ikke med π erstattet af 2π! Begynd med at vise, at $c(\pi) = \pm 1$ og $s(\pi) = 0$, og vis derefter, at $c(\pi) \neq 1$ (pga. entydighed).
9. Brug additionsformlerne til at vise identiteterne $s(t + \pi) = -s(t)$,

$c(t+\pi) = -c(t)$, $c(t) = s(t+\frac{\pi}{2})$ og $c^2(t) = \frac{1}{2}(1+c(2t))$.

10. Bemærk, at arealet A af enhedscirklen kan udtrykkes som integralet $4\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$. Brug dette og substitutionen $x = s(t)$ til at udregne $A = \pi$. Vink: Det er ikke helt åbenlyst – kløø på! Du er nået hertil...

Næste uge – uge 17 – går vi så småt i træningslejr til eksamen.

Med venlig hilsen
Morten Grud Rasmussen