

Supplement vedrørende invers matrix

Sætning 1 (Entydighed). For kvadratiske matricer A , C og D gælder, at

$$AC = I \quad \wedge \quad DA = I \quad \Rightarrow \quad C = D.$$

Bevis.

$$C = CI = C(AD) = (CA)D = ID = D.$$

Altså er $C = D$. □

Sætning 2. $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ har en løsning for ethvert \mathbf{b} , hvis og kun hvis A er rækkeækvivalent med I .

Bevis. Vi antager først, at $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ har en løsning for ethvert \mathbf{b} , og vi argumenterer indirekte. Antag A ikke er rækkeækvivalent med I . Det betyder, at A ved rækkeoperationer kan omformes til en matrix med en nulrække som sidste række. Udføres rækkeoperationerne på totalmatricen $[A|\mathbf{b}]$ vil \mathbf{b} blive omdannet til en vektor \mathbf{c} . Når sidste komponent i \mathbf{c} er forskellig fra 0, har $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ingen løsning, hvilket giver en modstrid. Altså er A rækkeækvivalent med I .

Går vi omvendt ud fra, at A er rækkeækvivalent med I , viser rækkeoperationer, at $[A|\mathbf{b}] \sim \dots \sim [I|\mathbf{c}]$. Dvs. for et vilkårligt \mathbf{b} får vi løsningen $\mathbf{x} = \mathbf{c}$. □

Sætning 3. For kvadratiske matricer A og C gælder, at

$$AC = I \quad \Rightarrow \quad CA = I.$$

Bevis. $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ har en løsning for ethvert \mathbf{b} , nemlig $\mathbf{x} = C\mathbf{b}$, idet $A(C\mathbf{b}) = (AC)\mathbf{b} = I\mathbf{b} = \mathbf{b}$. A er altså rækkeækvivalent med I , jf. sætning 2. Når A er rækkeækvivalent med I , så findes elementære matricer E_1, E_2, \dots, E_k , så $E_k \cdots E_2 E_1 A = I$ eller $DA = I$, hvor $D = E_k \cdots E_2 E_1$. Vi har nu $AC = I$ og $DA = I$, hvorefter $D = C$ ifølge sætning 1. □

Korollar 1. $AC = I \quad \Rightarrow \quad A$ er regulær $\quad \wedge \quad A^{-1} = E_k \cdots E_2 E_1$.

Korollar 2. A er regulær, hvis og kun hvis A er rækkeækvivalent med I .

Korollar 3. For kvadratiske matricer A og B gælder, at

$$AB = I \quad \Rightarrow \quad A^{-1} = B \quad \wedge \quad B^{-1} = A.$$

Algoritme 1. Simultant gælder

$$E_k \cdots E_2 E_1 A = I \quad \wedge \quad E_k \cdots E_2 E_1 I = A^{-1},$$

dvs.

$$[A|I] \sim \cdots \sim [I|C] \quad \Rightarrow \quad C = A^{-1}. \quad \square$$

For matrixligningen $AX = B$, hvor A er regulær, gælder

$$AX = B \quad \Leftrightarrow \quad A^{-1}AX = A^{-1}B \quad \Leftrightarrow \quad IX = A^{-1}B \quad \Leftrightarrow \quad X = A^{-1}B.$$

Algoritme 2. Simultant gælder

$$E_k \cdots E_2 E_1 A = I \quad \wedge \quad E_k \cdots E_2 E_1 B = A^{-1}B,$$

dvs.

$$[A|B] \sim \cdots \sim [I|C] \quad \Rightarrow \quad C = A^{-1}B. \quad \square$$

2.11.2011/BR