Formel for invers matrix

For determinanten af en $n \times n$ matrix har vi udtrykkene

$$\begin{aligned} \det A &= \sum_{j=1}^{n} a_{ij} c_{ij}, \quad i \in \{1, \dots, n\} \qquad (1) \\ &= \sum_{i=1}^{n} a_{ij} c_{ij}, \quad j \in \{1, \dots, n\}. \end{aligned}$$

Her er c_{ij} det såkaldte komplement til elementet a_{ij}. Komplementet kan udtrykkes ved et fortegn samt underdeterminanten $\det A_{ij}$. Underdeterminanten fremkommer ved at tage determinant af undermatricen A_{ij}, som er fremkommet af A ved at slette den i'te række og den j'te søjle i A, dvs. A_{ij} er en $(n-1) \times (n-1)$ matrix. Bemærk at $\det A$ på denne måde er udtrykt rekursivt.

For komplementet c_{ij} gælder

$$c_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij}.$$

Samler vi alle komplementer til A's elementer i en matrix, får vi komplementmatricen hørende til A. Den betegnes A_c.

I det følgende får vi brug for Kroneckers delta, som defineres således:

$$\delta_{rs} = \begin{cases} 1 & \text{for } r = s \\ 0 & \text{for } r \neq s \end{cases}$$

Bemærk, at hvis vi samler δ_{rs} med værdierne $1, \dots, n$ for r og s i en matrix, så fremkommer enhedsmatricen I.

Vi er nu klar til at udvikle en formel for A^{-1}. Bemærk først, at

$$\sum_{j=1}^{n} a_{\ell j} c_{ij} = \delta_{\ell i} \det A. \qquad (2)$$

For $\ell = i$ er (2) er identisk med (1), idet $\delta_{ii} = 1$. For $\ell \neq i$ svarer venstresiden til at udregne determinanten af en matrix med $a_{\ell j}$, $j = 1, \dots, n$, i både den ℓ'te række og den i'te række. Værdien af denne determinant er 0, hvilket passer med højre side, idet $\delta_{\ell i} = 0$ for $\ell \neq i$.

Vi omformer nu venstre side af (2):

$$\sum_{j=1}^{n} a_{\ell j} c_{ij} = \sum_{j=1}^{n} (A)_{\ell j} (A_c)_{ij} = \sum_{j=1}^{n} (A)_{\ell j} (A_c^\top)_{ji} = (A A_c^\top)_{\ell i},$$

som indsat i (2) giver

$$(AA_c^\top)_{\ell i} = \delta_{\ell i} \det A.$$

Da denne identitet er gyldig for alle ℓ og i, må der gælde, at

$$AA_c^\top = (\det A)I.$$

Når det forudsættes, at A er regulær, dvs. $\det A \neq 0$, kan vi omskrive ovenstående udtryk til

$$A\Big(\frac{1}{\det A}A_c^\top\Big) = I.$$

Heraf aflæses, at

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}A_c^\top,$$

som er den ønskede formel for A^{-1}.

Eksempel 1.

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \qquad A \text{ regulær}, \qquad \det A = ad - bc$$

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -a \\ -b & c \end{bmatrix}^\top = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix},$$

som er identisk med den tidligere udledte formel. □

Formlen for A^{-1} har primært teoretisk interesse, men for 3×3 matricer udgør den et anvendeligt regneteknisk alternativ til den ellers benyttede algoritme.

Eksempel 2.

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \det A = \begin{vmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 4$$

$$A^{-1} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ 1 & 1 & -4 \\ -2 & 2 & 8 \end{bmatrix}^\top = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & 2 \\ -4 & -4 & 8 \end{bmatrix}$$

Kontroludregning:

$$AA^{-1} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & 2 \\ -4 & -4 & 8 \end{bmatrix} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$ □

9.11.2011/BR