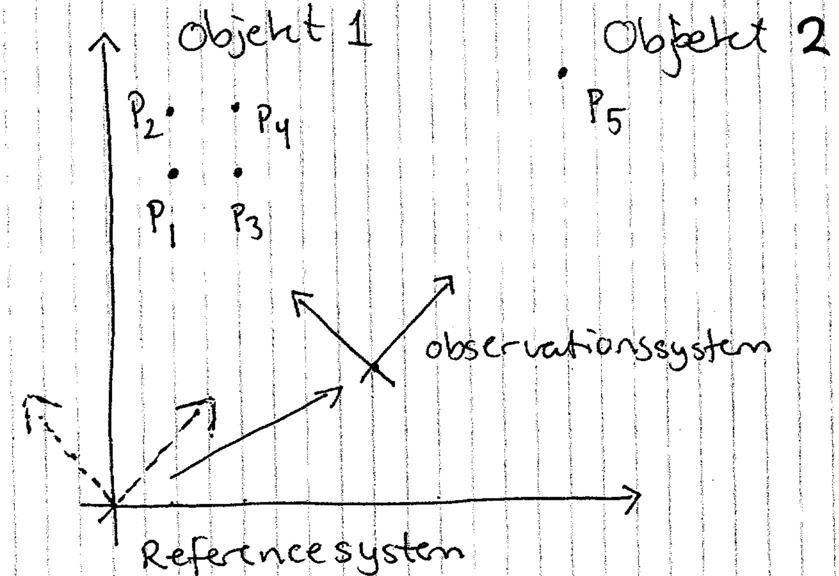
Eks 1



Man kommer fra referencesystemet til observationssystemet ved først at rotere dette med 45^0 mod uret for dernæst at translatere det med (forskyde det) $\begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix}$

I referencesystemet har objekt 1 koordinaterne

$$P_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 10 \end{pmatrix} \quad P_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 12 \end{pmatrix}$$

$$P_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 10 \end{pmatrix} \quad P_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 12 \end{pmatrix}$$

og objekt 2 har koordinaterne $P_5 = \begin{pmatrix} 14 \\ 13 \end{pmatrix}$

Hvad er de tilsvarende koordinater af objekterne i observationssystemet?

Før vi besvarer dette spørgsmål oversætter vi lige til homogene koordinater.

$$P_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 10 \\ 1 \end{pmatrix} \quad P_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 12 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$P_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 10 \\ 1 \end{pmatrix} \quad P_4 = \begin{pmatrix} 4 \\ 12 \\ 1 \end{pmatrix} \quad P_5 = \begin{pmatrix} 14 \\ 13 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Når referencesystemet roteres med 45° vil punktet $\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$ roteres over i

$$\begin{bmatrix} \cos(45^\circ) & \sin(45^\circ) & 0 \\ -\sin(45^\circ) & \cos(45^\circ) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

Når observationssystemet translateres med $\begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix}$ vil punkterne fra observations-systemet opleves som translateret modsat, altså med $\begin{pmatrix} -8 \\ -4 \end{pmatrix}$. Alt ialt opleves punktet $\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$ i det nye koordinatsystem (observationssystemet) som

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -8 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

Så i det nye koordinatsystem (observations-systemet) ses punkterne

$$P_1' = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -8 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 10 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12\sqrt{2}-8 \\ 8\sqrt{2}-4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$P_2' = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -8 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 12 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14\sqrt{2}-8 \\ 10\sqrt{2}-4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$P_3' = \begin{bmatrix} 14\sqrt{2}-8 \\ 6\sqrt{2}-4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$P_4' = \begin{bmatrix} 16\sqrt{2}-8 \\ 8\sqrt{2}-4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$P_5' = \begin{bmatrix} 27\sqrt{2}-8 \\ -\sqrt{2}-4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Opgave 1:

P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 som i eks 1, men observationssystemet fremkommer fra reference-systemet ved først at rotere med 60° og dernæst translatere med $\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Find $P_1', P_2', P_3', P_4', P_5'$.

Opgave 2

Dette er en fortsættelse af eks. 1.

Observationssystemet roteres nu yderligere med 45^0 og translateres $\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$. Hvad er nu P_1', P_2', P_3', P_4', P_5' ?

Eks 2

Dette er en fortsættelse af eks 1.
Ud over det der sker i eks. 1 forestiller vi os at objekt 1 roterer om sit massemidtpunkt $\begin{pmatrix}3\\11\end{pmatrix}$ med en vinkel på 45^0.
Herved fremkommer punkterne $\overline{P_1}$, $\overline{P_2}$, $\overline{P_3}$ og $\overline{P_4}$ i referencesystemet. Vi ønsker nu at finde ud af hvad de tilsvarende koordinater $\overline{P_1}'$, $\overline{P_2}'$, $\overline{P_3}'$ og $\overline{P_4}'$ er i observationssystemet.

Først beregnes $\overline{P_1}$, $\overline{P_2}$, $\overline{P_3}$ og $\overline{P_4}$.

Vi flytter massemidtpunktet til origo vha. translationen

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -11 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$ så roteres vha

$$\begin{bmatrix} \cos(45^\circ) & -\sin(45^\circ) & 0 \\ \sin(45^\circ) & \cos(45^\circ) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

og så translateres tilbage igen

vha $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 11 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

alt ialt haves operatoren

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 11 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -11 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 8\frac{1}{\sqrt{2}}+3 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -14\frac{1}{\sqrt{2}}+11 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

så eksempelvis flyttes P_1 over i

$$\overline{P_1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 8\frac{1}{\sqrt{2}}+3 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -14\frac{1}{\sqrt{2}}+11 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 10 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2\frac{1}{\sqrt{2}}+11 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\overline{P_2}$, $\overline{P_3}$ og $\overline{P_4}$ findes tilsvarende.

$\overline{P_1}'$ findes herefter som i eksempel 1.

Vi har

$$\overline{P_1}' = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -8 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -2\frac{1}{\sqrt{2}}+11 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 7\frac{1}{\sqrt{2}}-9 \\ 8\frac{1}{\sqrt{2}}-5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Tilsvarende findes $\overline{P_2}'$, $\overline{P_3}'$ og $\overline{P_4}'$.

<u>Opgave 3</u>

Dette er en uddybelse af eks. 2.

Find $\overline{P_2}$, $\overline{P_3}$ og $\overline{P_4}$ samt

$\overline{P_2}'$, $\overline{P_3}'$ og $\overline{P_4}'$.

Eks 3

Observationssystemet fremkommer ved at rotere referencesystemet 120° omkring aksen $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ og herefter translatere med $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$.

Når referencesystemet roteres vil punkterne $\begin{pmatrix}x\\y\\z\\1\end{pmatrix}$ roteres over i

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$ (se side 58)

Når observationssystemet translateres med $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ vil punkterne opleves (set fra observationssystemet) som translateret modsat, altså med $\begin{pmatrix}-1\\-2\\-3\end{pmatrix}$, alt i alt opleves punktet $\begin{pmatrix}x\\y\\z\\1\end{pmatrix}$ i det nye koordinatsystem (observationssystem) som

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

Objekt 1 består af punkterne

$$P_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$P_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$P_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$P_4 = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

I observationssystemet ses

P_1, P_2, P_3 og P_4 som

$$P_1' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} P_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$P_2' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} P_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$P_3' = \begin{bmatrix} & & & \\ & -\|- & & \\ & & & \end{bmatrix} P_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$P_4' = \begin{bmatrix} & & & \\ & -\|- & & \\ & & & \end{bmatrix} P_4 = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Vi forestiller os nu, at computer-skærmen er placeret i x-y planet i observationssystemet.

Skærmen svarer til firkanten

$$[-2\ ,\ 2\ ] \times [-2\ ,\ 2\ ]$$

Vi ser P_1', P_2', P_3' og P_4' som deres projektion ned på skærmen

P_1' ses som $\tilde{P}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

P_2' —‖— $\tilde{P}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ (falder udenfor skærmen)

P_3' —‖— $\tilde{P}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

P_4' —‖— $\tilde{P}_4 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ (falder udenfor skærmen)

<u>Opgave 4</u>

Objekt 2. $P_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Find $\tilde{P}_5$

<u>Opgave 5</u>

Dette er en fortsættelse af eks. 3.
Objektet 1 bestående af P_1, P_2, P_3 og P_4
roteres med 120° omkring en
akse parallel med $\bar{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ gennem
massemidtpunktet for P_1, P_2, P_3, P_4.
Herved fremkommer $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \bar{P}_3, \bar{P}_4$.
10/10 Find $\bar{P}_1', \bar{P}_2', \bar{P}_3', \bar{P}_4'$ og $\tilde{\bar{P}}_1', \tilde{\bar{P}}_2', \tilde{\bar{P}}_3', \tilde{\bar{P}}_4'$.