I denne note arbejdes med kurver og flader i rummet. Vi starter dog med valt terminologi for kurver i planet, da det er det, I som udgangspunkt er mest fortrolige med

<u>Definition 1</u>

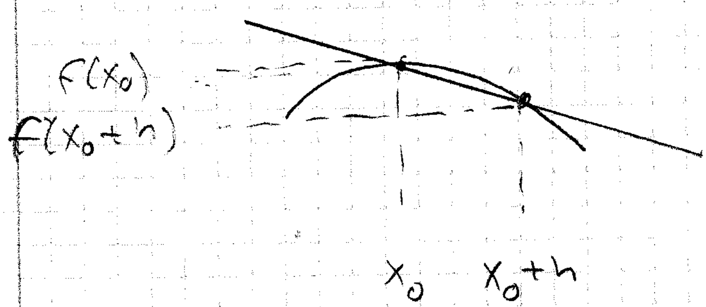
En funktion $y = f(x)$ er differentiabel i x_0 hvis følgende grænseværdi findes

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

. Findes grænseværdien da benævnes den

$$y' = f'(x_0) = \frac{df}{dx} = \frac{df}{dx}(x_0)$$

<u>Fortolkning:</u>



så $\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$ er hældningen af linien i ovenstående figur.

Hvis ovenstående grænseværdi findes, da angiver $f'(x_0)$ hældningen af tangenten til $y=f(x)$ i $(x_0, f(x_0))$.

Tangenten har formlen $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

Dette vises på følgende måde

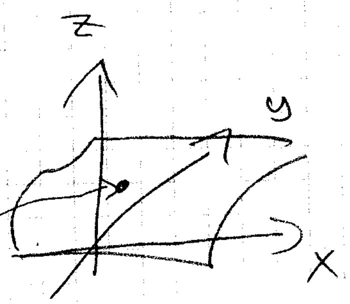
For $X = X_0$ fås ved indsættelse

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x_0 - x_0) = f(x_0)$$

så linien går gennem $(x_0, f(x_0))$.

Endvidere er hældningen netop $f'(x_0)$ som ønsket idet formlen kan omskrives til

$$y = f'(x)x + \underbrace{(f(x_0) - f'(x_0)x_0)}_{\text{konstantled}}$$

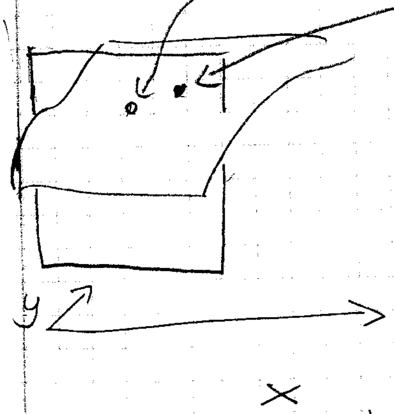


$(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$

$$z = f(x, y)$$

$(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$

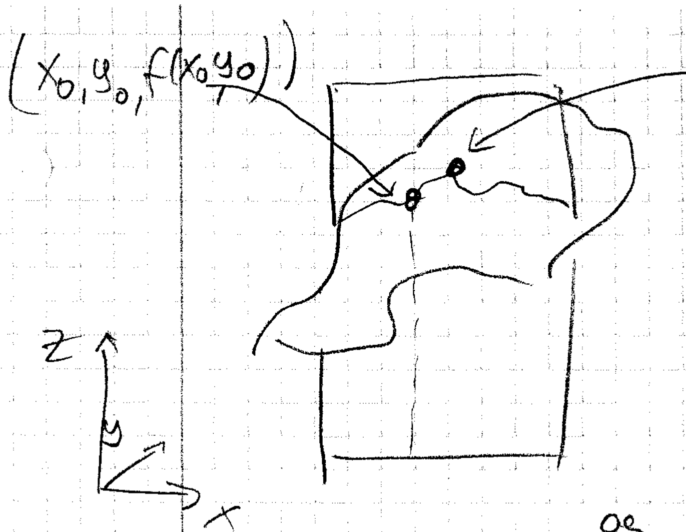
$(x_0 + h, y_0, f(x_0 + h, y_0))$



$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$

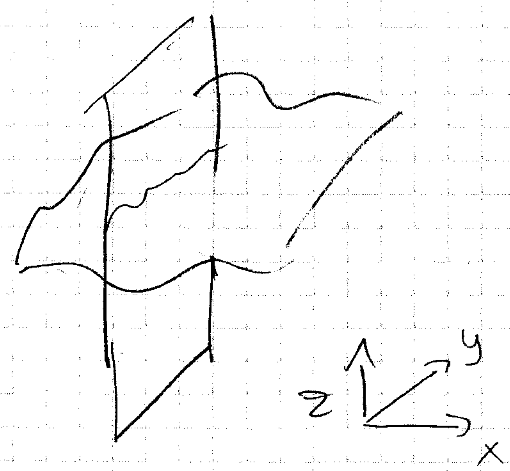
hvis denne findes.

Kaldes partielt afledte mht X og beskriver hældningen i (x_0, y_0) af den kurve som fremkommer når



fladen $(x, y, f(x,y))$
skæres med
et lodret plan
parallelt med x-aksen
og gennem $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$
altså af kurven $z = f(x, y_0)$

Tilsvarende defineres $\frac{\partial f}{\partial y}$,
den partielt afledte mht. y.
Denne beskriver hældningen i (x_0, y_0)
af den kurve som fremkommer
når fladen $(x, y, f(x,y))$ skæres med
et lodret plan parallelt med y-aksen
og gennem $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$.
altså af kurven $z = f(x_0, y)$



Regler for partiel differentiation:
$\frac{\partial F}{\partial x}$ findes ved i $F(x,y)$ at betragte y som en konstant og så ellers differentiere mht. x.
Tilsvarende findes $\frac{\partial F}{\partial y}$.

Eks 3 $F(x,y) = x \cdot y^2 \quad \frac{\partial F}{\partial x} = y^2$ [OG 5]

$\boxed{\text{Kæderegel 1}}$ og $\frac{\partial F}{\partial y} = x \cdot 2y$

$$\frac{d}{dx}\left(f(g(x))\right) = f'(g(x))\,g'(x)$$

Eks 4

$$h(x) = (\cos(x))^2 \quad \text{så} \quad h'(x) = 2(\cos(x)) \cdot (-\sin(x)).$$

dad

$$k(t) = F(g(t), h(t))$$

Eks 5

$$F(x,y) = \cos(x) + y^2$$

$$g(t) = t^3 \quad h(t) = 2 + 3t$$

$$k(t) = \cos(t^3) + (2+3t)^2$$

Kæderegel 2

$$k'(t) = \frac{\partial F}{\partial x}(g(t), h(t)) \cdot g'(t) + \frac{\partial F}{\partial y}(g(t), h(t))\, h'(t)$$

Eks 6

Fortsættelse af Eks 5. $\frac{\partial F}{\partial x} = -\sin x$

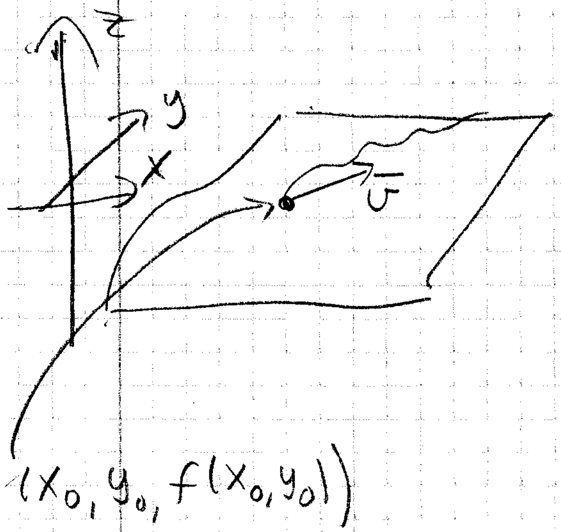
$\frac{\partial F}{\partial y} = 2y$

$[0,0,0]$

$$g'(t) = 3t^2 \quad h'(t) = 3$$

så

$$k'(t) = -\sin(t^3) \cdot 3t^2 + 2(2+3t) \cdot 3$$



står i $(x_0, y_0, f(x_0,y_0))$ og kigger i retningen

$$\bar{v} = (v_1, v_2)$$

x-koordinat

y-koordinat

Hvad ser vi?

Jo vi ser en kurve som løber på fladen $z = f(x,y)$ i retningen $\bar{v}$ og gennem (x_0, y_0)

Denne kurve har formen

$$k(t) = f(x_0 + tv_1, y_0 + tv_2)$$

Hvor meget stiger fladen $f(x,y)$ i retningen $\bar{v}$? Vi benytter kæderegel 2 til at beregne

$$k'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0+tv_1, y_0+tv_2)(x_0+tv_1)' + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0+tv_1, y_0+tv_2)(y_0+tv_2)'$$

så hvis vi står i (x_0, y_0) så $t=0$

5/8 og $k'(0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)v_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)v_2$

angiver hældningen
af fladen i retningen $\bar{v}$.

Kaldes den retningsafledte af
fladen $z = f(x,y)$ i (x_0, y_0)
i retningen $\bar{v}$.

og er altså lig

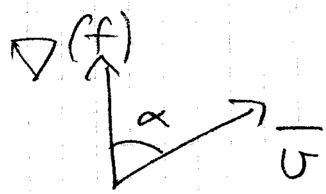
$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0),\ \frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0)\right) \cdot (v_1, v_2)$$

uafhængigt af (v_1, v_2)
kaldes gradienten og skrives $\nabla(f(x_0,y_0))$

<u>Sætning</u>

Gradienten peger i den retning, hvor fladen stiger hurtigst.

<u>Bevis</u>:



$$\nabla(f(x_0,y_0)) \cdot (v_1, v_2)$$

$$= \|\nabla(f(x_0,y_0))\| \cdot \|\bar{v}\| \cos(\alpha).$$

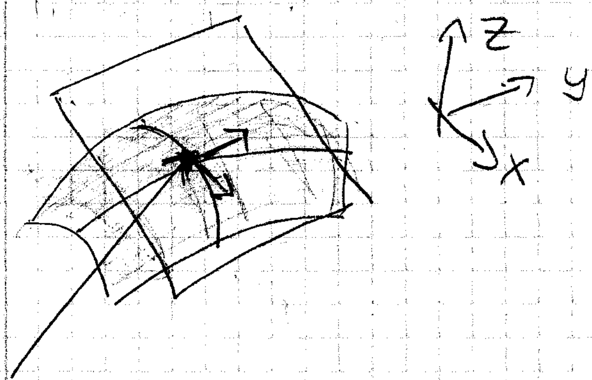
så $\alpha = 0$ giver størst stigning □

Betragt [OG 5]

Tangentplanet til

$z = f(x, y)$ som rører i

punktet $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$



$(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$

Tangenten til fladen i x-aksensretning er ifølge side 1 lig beskrevet ved vektoren

$$\overline{u}_1 = \left(1, 0, \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\right)$$

Tilsvarende er tangenten til fladen i y-aksensretning beskrevet ved vektoren

$$\overline{u}_2 = \left(0, 1, \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\right)$$

Så en normal til fladen er

$$\overline{n} = \overline{u}_1 \times \overline{u}_2 = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 1 & 0 & \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \\ 0 & 1 & \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \end{vmatrix}$$

[OG 5]

$$= \left(-\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), -\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0), 1 \right)$$

Så ligningen for tangentplanet er

$$(x - x_0, y - y_0, z - z_0) \cdot \overline{n} = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$-(x - x_0)\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) - (y - y_0)\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) + (z - z_0) = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$z - z_0 = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)$$