Olav 28/10-04

# Note: Bestemmelse af rotationsvinkel og rotationsakse

Lad

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

være en rotationsmatrix.
Ifølge afsnit 3.7.1 i [kuip] beskriver

$$\bar{v} = \begin{pmatrix} a_{23} - a_{32} \\ a_{31} - a_{13} \\ a_{12} - a_{21} \end{pmatrix}$$

en rotationsakse for A.
Mere præcist er rotationsaksen givet ved

$$\{ s\bar{v} \mid s \in \mathbb{R} \}.$$

Ifølge afsnit 3.5 opfylder rotationsvinklen $\phi$ at

$$\cos\phi = \frac{Tr(A)-1}{2} = \frac{a_{11}+a_{22}+a_{33}-1}{2} \qquad (\text{☆}')$$

Ligningen (☆') giver to løsninger $\phi$, nemlig et $\phi$ i intervallet $[0°, 180°]$ og et $\phi$ i intervallet $[180°, 360°]$

Vi viser nu, at hvis vi lader rotationsaksen $\{s\bar{v} \mid s \in \mathbb{R}\}$ være orienteret i samme retning som $\bar{v}$, da gælder at den korrekte vinkel er den løsning til (8') som ligger i intervallet $[0°, 180°]$.

Vektoren
$$\bar{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ a_{21} - a_{12} \\ a_{31} - a_{13} \end{pmatrix}$$
står vinkelret på $\bar{v}$, idet $\bar{v} \cdot \bar{w} = 0$.

Uden tab af generalitet kan vi antage, at $a_{21} - a_{12} \neq 0$.

Vi beregner nu

$\bar{u} = A\bar{w}$ og får

$$\bar{u} = \begin{pmatrix} a_{12}(a_{21} - a_{12}) + a_{13}(a_{31} - a_{13}) \\ a_{22}(a_{21} - a_{12}) + a_{23}(a_{31} - a_{13}) \\ a_{32}(a_{21} - a_{12}) + a_{33}(a_{31} - a_{13}) \end{pmatrix}$$

<u>Koordinatsystemet</u> er roteret med vinklen $\phi$, og derfor er vinklen
2/6 fra $\bar{w}$ til $\bar{u}$ lig $-\phi$ (!!!)

Olav 28/10-04

Vi skal altså vise, at $-\phi \in [180°, 360°]$.

Ifølge højrehåndsreglen vedrørende krydsproduktet skal vi altså vise, at

$\bar{w} \times \bar{u} = s \cdot \bar{v}$ for et eller andet negativt s.

Vi ved $\bar{w} \times \bar{u} = s \cdot v$ for $s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, men skal altså vise $s < 0$.

$$\bar{w} \times \bar{u} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & a_{21}-a_{12} & a_{31}-a_{13} \\ a_{12}(a_{21}-a_{12}) + a_{13}(a_{31}-a_{13}) & a_{22}(a_{21}-a_{12}) + a_{23}(a_{31}-a_{13}) & a_{32}(a_{21}-a_{12}) + a_{33}(a_{31}-a_{13}) \end{vmatrix}$$

Vi betragter koefficienten til $\bar{k}$.

Denne er $-(a_{21}-a_{12}) \cdot [a_{12}(a_{21}-a_{12}) + a_{13}(a_{31}-a_{13})]$

så $s = a_{12}(a_{21}-a_{12}) + a_{13}(a_{31}-a_{13})$.

Vi får brug for følgende to lemmaer.

## Lemma 1

For enhver rotationsmatrix $A = [a_{ij}]$ gælder $|a_{ij}| \leq 1$ for $1 \leq i, j \leq 3$

Bevis:

Vi viser $a_{11}^2, a_{21}^2, a_{31}^2 \leq 1$.

Vi har

$$A \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{bmatrix}.$$

Længder bevares ved rotationer, så

$$\|(1,0,0)\| = \|(a_{11}, a_{21}, a_{31})\|$$

$$\Downarrow \quad a_{11}^2 + a_{21}^2 + a_{31}^2 = 1$$

og specielt er $a_{i1}^2 \leq 1$ for $i = 1, 2, 3$

$\square$

Olav 28/10-04

<u>Lemma 2</u>

$$a_{11}^2 + a_{12}a_{21} + a_{13}a_{31} \leq 1$$

$$a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{13}^2 = 1$$

<u>Bevis:</u>

$AA$ er en ny rotationsmatrix (rotation om $\bar{v}$ med $2\phi$).
Indgang $(1,1)$ i $AA$ er
$a_{11}^2 + a_{12}a_{21} + a_{13}a_{31}$ og første resultat i lemmaet følger nu af Lemma 1.
Vi har $A^T A = I$. altså
$A^{-1} = A^T$ og dermed

$$AA^T = I \qquad (*^2)$$

Indgang $(1,1)$ i $AA^T$ er
$a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{13}^2$ hvilket ifølge $(*^2)$ er lig 1.

$\square$

Ifølge vores plan er vi færdige hvis vi kan vise

$$a_{12}(a_{21} - a_{12}) + a_{13}(a_{31} - a_{13}) \leq 0 \qquad (*_3)$$

Vi regner

$$a_{12}(a_{21}-a_{12}) + a_{13}(a_{31}-a_{13})$$
$$= a_{12}a_{21} + a_{13}a_{31} - a_{12}^2 - a_{13}^2$$
$$= a_{12}a_{21} + a_{13}a_{31} - 1 + a_{11}^2$$
$$\leq 1 - 1 = 0$$

og vi er ferdige