De Store Tals Lov.

Lad $X_1, X_2, \ldots$ være en følge af ens fordelte, $X_i \sim X$, og uafhængige stokastiske (*independent and identical distributed i.i.d.* PROB s 222) variable med $E[X_i] = E[X] = \mu$, og $Var[X_i] = Var[X] = \sigma^2$.
Lad endvidere S_n være defineret ved $S_n = X_1 + \cdots + X_n$.

Så gælder for ethvert $\delta > 0$, at

$$P(\mid \frac{S_n}{n} - \mu \mid \geq \delta) \leq \frac{\sigma^2}{n\delta^2}, \tag{1}$$

hvoraf (*de store tals lov*), for ethvert $\delta > 0$,

$$\lim_{n\to\infty} P(\mid \frac{S_n}{n} - \mu \mid \geq \delta) = 0. \tag{2}$$

(2) udtrykker, at $\frac{S_n}{n}$ *konvergerer i sandsynlighed mod* μ.

Bevis for (1).
Der gælder $E[\frac{S_n}{n}] = \frac{1}{n}(E[X_1] + \cdots + E[X_n]) = \mu$, hvor vi har anvendt PROB, Proposition 3.6.6.
Endvidere, $Var[\frac{S_n}{n}] = \frac{1}{n^2}Var[X_1 + \cdots + X_n] = \frac{1}{n^2}(Var[X_1] + \cdots + Var[X_n])$
$= \frac{\sigma^2}{n}$, hvor vi har anvendt PROB, Proposition 3.6.7.
Vi anvender nu Chebychev's ulighed PROB, Proposition 2.4.7 på den stokastiske variable $\frac{S_n}{n}$ og får

$$P(\mid \frac{S_n}{n} - \mu \mid \geq \delta) = P(\mid \frac{S_n}{n} - \mu \mid \geq (\delta\frac{\sqrt{n}}{\sigma})\frac{\sigma}{\sqrt{n}}) \leq \frac{\sigma^2}{n\delta^2}.$$

□

Se iøvrigt også PROB, s269-s271.
Bemærk, at konklusionerne i (1) og (2) holder, hvis blot $X_1, X_2, \ldots$ er parvis uafhængige med samme forventningsværdi μ og varians σ^2.

Christian Thommesen.