11/2-2010

Relativ Entropi.

Med konventionerne

$$p_i \log \frac{p_i}{q_i} = 0 \text{ hvis } p_i = 0 \quad \& \quad p_i \log \frac{p_i}{q_i} = +\infty \text{ hvis } p_i > 0 \; og \; q_i = 0 \tag{1}$$

kan CIT Lemma 1.2.2 udtrykkes

$$\sum_{i=1}^{n} p_i \log \frac{p_i}{q_i} \geq 0. \; =, \text{ hvis og kun hvis } p_i = q_i \; for \; alle \; i. \tag{2}$$

Hvis $Q = \{q_1, \ldots, q_n\}$, ligesom $P = \{p_1, \ldots, p_n\}$, er en sandsynligheds fordeling, altså $\sum q_i = 1$,
defineres *den relative entropi* eller *Kullback Leibler afstanden* $D(P\|Q)$ mellem P og Q ved (ikke symmetrisk)

$$D(P\|Q) = \sum_{i=1}^{n} p_i \log \frac{p_i}{q_i}, \tag{3}$$

hvor konventionerne i (1) er underforståede.
(2) kaldes så *informations uligheden* , altså

$$D(P\|Q) \geq 0. \; =, \text{ hvis og kun hvis } P = Q. \tag{4}$$

Hvis X og Y er diskrete stokastiske variable med værdier i samme alfabet S, og

$$p(x) = P(X = x) \text{ og } q(x) = P(Y = x) \text{ for alle } x \in S,$$

defineres $D(X\|Y)$ ved

$$D(X\|Y) = \sum_{x \in S} p(x) \log \frac{p(x)}{q(x)}. \tag{5}$$

Der gælder nu

$$D(X\|Y) \geq 0. \; =, \text{ hvis og kun hvis } p(x) = q(x) \text{ for alle } x \in S. \tag{6}$$

Christian Thommesen.