Et par uligheder

> For ethvert $k \in \{0, 1, \dots, n\}$ gælder
> $$\frac{1}{n+1} 2^{nH(k/n)} \le \binom{n}{k} \le 2^{nH(k/n)}, \quad (*)$$
> hvor H er med grundtal 2

Beviisskitse

a Højre ulighed:

For alle p, $0 \le p \le 1$ gælder

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} = 1,$$

og da alle led i summen på venstre side af lighedstegnet er positive, gælder $\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \le 1$ for alle $k \in \{0, 1, \dots, n\}$. Med $p = k/n$ fås heraf

$$\binom{n}{k} 2^{n\left(\frac{k}{n}\log\frac{k}{n} + \left(1-\frac{k}{n}\right)\log\left(1-\frac{k}{n}\right)\right)} = \binom{n}{k} \cdot 2^{-nH\left(\frac{k}{n}\right)}$$

≤ 1, hvoraf $\binom{n}{k} \le 2^{nH(k/n)}$

•

b Venstre ulighed

Der gælder
$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \left(\frac{k}{n}\right)^{i} \left(1-\frac{k}{n}\right)^{n-i} = 1.$$

Følgen $\binom{n}{i}\left(\frac{k}{n}\right)^{i}\left(1-\frac{k}{n}\right)^{n-i}$, $i \in \{0,1,\dots,n\}$
er voksende for $i \leq k$ og aftagende
for $i \geq k$.

Altså
$$(n+1)\binom{n}{k}\left(\frac{k}{n}\right)^{k}\left(1-\frac{k}{n}\right)^{n-k}$$
$$\geq \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}\left(\frac{k}{n}\right)^{i}\left(1-\frac{k}{n}\right)^{n-i} = 1 .$$

Følgelig $(n+1)\binom{n}{k} 2^{-nH(k/n)} \geq 1$,

hvoraf $\binom{n}{k} \geq \frac{1}{n+1} 2^{nH(k/n)}$. $\blacksquare$

Et par uligheder

CIT (1.2.5)

For $p>0$, $q>0$, $p+q=1$ og $0\le\lambda\le p$ $\mu+\lambda=1$
gælder
$$\sum_{k=0}^{\lfloor\lambda n\rfloor}\binom{n}{k}p^k q^{n-k}\le\lambda^{-\lambda n}\mu^{-\mu n}p^{\lambda n}q^{\mu n}$$

Bevisskitse

For ethvert x, $0<x\le 1$ gælder
$$x^{\lambda n}\sum_{k=0}^{\lfloor\lambda n\rfloor}\binom{n}{k}p^k q^{n-k}\le\sum_{k=0}^{\lfloor\lambda n\rfloor}\binom{n}{k}(xp)^k q^{n-k}$$
$$\le\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(xp)^k q^{n-k}=(q+px)^n,\text{ hvoraf}$$
$$\sum_{k=0}^{\lfloor\lambda n\rfloor}\binom{n}{k}p^k q^{n-k}\le\left(x^{-\lambda}(q+px)\right)^n$$

Funktionen $\varphi(x)=x^{-\lambda}(q+px)$, $x>0$
har minimum for $x=\frac{\lambda}{\mu}\frac{q}{p}$, og da
$\frac{\lambda}{\mu}\frac{q}{p}\le 1\Leftrightarrow\lambda\le p$, fås ~~Altså~~ for $\lambda\le p$:
$$\sum_{k=0}^{\lfloor\lambda n\rfloor}\binom{n}{k}p^k q^{n-k}\le\left(\varphi(\lambda q/\mu p)\right)^n=\left(\lambda^{-\lambda}\mu^{-\mu}p^{\lambda}q^{\mu}\right)^n$$

$\square$

Et par uligheder

Med $P = (p, q)$ og $\Lambda = (\lambda, \mu)$,

kan uligheden i CIT (1.2.5)

også udtrykkes

CIT (1.2.5, a)

$$\sum_{k=0}^{\lfloor \lambda n \rfloor} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \leq 2^{-nD(\Lambda \| P)},$$

hvor logaritme~~grund~~tallet i $D(\Lambda \| P)$ er 2. (D er den relative entropi)

Et par uligheder

Vedrørende antallet af elementer i en Hamming kugle med radius $\lfloor \lambda n \rfloor$ over alfabetstørrelse q:

$$\boxed{\text{For } q \in \mathbb{Z}^+,\ q \geq 2 \text{ og } 0 \leq \lambda \leq \frac{q-1}{q} \text{ gælder } \sum_{k=0}^{\lfloor \lambda n \rfloor} \binom{n}{k}(q-1)^k \leq q^{(H_q(\lambda) + \lambda \log_q(q-1))n}.}$$

(CIT Theorem 1.2.8 er korollar til ovenstående.)

Bevis skitse

$$\sum_{k=0}^{\lfloor \lambda n \rfloor} \binom{n}{k}(q-1)^k = q^n \sum_{k=0}^{\lfloor \lambda n \rfloor} \binom{n}{k}\left(1-\frac{1}{q}\right)^k \left(\frac{1}{q}\right)^{n-k},$$

og ved anvendelse af CIT (1.2.5) med

$p := 1 - \frac{1}{q}$ og $q := \frac{1}{q}$ fås

$$\sum_{k=0}^{\lfloor \lambda n \rfloor} \binom{n}{k}(q-1)^k \leq q^n \underbrace{\lambda^{-\lambda n} \mu^{-\mu n}}_{q^{n H_q(\lambda)}} \left(1-\frac{1}{q}\right)^{\lambda n} \left(\frac{1}{q}\right)^{\mu n}$$

$$= q^n q^{n H_q(\lambda)} \left(1-\frac{1}{q}\right)^{\lambda n} \left(\frac{1}{q}\right)^{\mu n}$$

$$= q^{n H_q(\lambda)} q^{\lambda n}\left(1-\frac{1}{q}\right)^{\lambda n} \cdot q^{\mu n}\left(\frac{1}{q}\right)^{\mu n}$$

$$= q^{n H_q(\lambda)} (q-1)^{\lambda n}$$

$\blacksquare$