Lineære ligningssystemer

Olav Geil
Januar 2000

Eksempel 1
Ligningssystemet

$$\left\{\begin{array}{l} 3x+7y=2 \\ 3x+6y=1 \end{array}\right. \tag{1}$$

kan også skrives

$$\left[\begin{array}{c} 3x+7y \\ 3x+6y \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} 2 \\ 1 \end{array}\right]$$

$$\Updownarrow$$

$$\left[\begin{array}{cc} 3 & 7 \\ 3 & 6 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} x \\ y \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} 2 \\ 1 \end{array}\right].$$

Matricen

$$\left[\begin{array}{cc} 3 & 7 \\ 3 & 6 \end{array}\right]$$

kaldes for **koefficientmatricen** *for ligningssystemet (1). Ligningssystemet (1) er fuldstændig beskrevet vha. den såkaldte* **udvidede matrix** *(the augmented matrix)*

$$\left[\begin{array}{cc|c} 3 & 7 & 2 \\ 3 & 6 & 1 \end{array}\right].$$

Eksempel 2
Ligningssystemet

$$\left\{\begin{array}{rcr} 3x+4y-5z & = & 2 \\ 88x-3y & = & 48 \end{array}\right. \tag{2}$$

svarer til den udvidede matrix

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 3 & 4 & -5 & 2 \\ 88 & -3 & 0 & 48 \end{array}\right].$$

Eksempel 3
Ligningssystemet

$$\left\{\begin{array}{rcr} x+y & = & 2 \\ x+2y & = & 4 \\ x+3y & = & 5 \end{array}\right.$$

svarer til den udvidede matrix

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 5 \end{array}\right]$$

(ligningssystemet har ingen løsninger, kan du se hvorfor?).

Når man skal løse et bare lidt indviklet lineært ligningssystem, er det meget lettere at arbejde med den udvidede matrix, frem for med selve ligningssystemet. Vi illustrerer først metoden vha. et ikke særlig indviklet eksempel, og giver efterfølgende et mere kompliceret eksempel.

Eksempel 4
Dette er en fortsættelse af eksempel 1. Traditionelle metoder giver

$$\left\{\begin{array}{rrcr} 3x & +7y & = & 2 \\ 3x & +6y & = & 1 \end{array}\right. \tag{3}$$

$$\Updownarrow$$

$$\left\{\begin{array}{rrcr} 3x & +7y & = & 2 \\ -3x & -6y & = & -1 \end{array}\right. \tag{4}$$

$$\Updownarrow$$

$$\left\{\begin{array}{rrcr} 3x & +7y & = & 2 \\ & y & = & 1 \end{array}\right. \tag{5}$$

$$\Updownarrow$$

$$\left\{\begin{array}{rrcr} 3x & & = & -5 \\ & y & = & 1 \end{array}\right. \tag{6}$$

$$\Updownarrow$$

$$\left\{\begin{array}{rrcr} x & & = & -\frac{5}{3} \\ & y & = & 1 \end{array}\right. . \tag{7}$$

De udvidede matricer hørende til (3), (4),$\cdots$, (7) er

$$\left[\begin{array}{cc|c} 3 & 7 & 2 \\ 3 & 6 & 1 \end{array}\right] \tag{8}$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 3 & 7 & 2 \\ -3 & -6 & -1 \end{array}\right] \tag{9}$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 3 & 7 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \tag{10}$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 3 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \tag{11}$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -\frac{5}{3} \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right] . \tag{12}$$

Bemærk følgende meget vigtige sammenhænge:

Ligesom vi kommer fra (3) til (4) ved at gange ligning to igennem med -1*, så kommer vi fra (8) til (9) ved at gange række to igennem med* -1*.*

Ligesom vi kommer fra (4) til (5) ved at lægge ligning et og ligning to sammen, så kommer vi fra (9) til (10) ved at lægge række et og række to sammen.

Ligesom vi kommer fra (5) til (6) ved at trække 7 gange ligning to fra ligning et, så kommer vi fra (10) til (11) ved at trække 7 gange række to fra række et.

Ligesom vi kommer fra (6) til (7) ved at dividere ligning et med 3, så kommer vi fra (11) til (12) ved at dividere række et med 3.

Vi skriver

$$\left[\begin{array}{cc|c} 3 & 7 & 2 \\ 3 & 6 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 3 & 7 & 2 \\ -3 & -6 & -1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 3 & 7 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \\ \sim \left[\begin{array}{cc|c} 3 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -\frac{5}{3} \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right].$$

Generelt siges to udvidede matricer

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} & b_n \end{array}\right]$$

og

$$\left[\begin{array}{cccc|c} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1m} & d_1 \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2m} & d_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nm} & d_n \end{array}\right]$$

at være **rækkeækvivalente** hvis den ene kan fås fra den anden ved at udføre en kombination af følgende operation på den anden matrix:

R1 ombytte to rækker

R2 gange en række med en konstant (forskellig fra 0)

R3 erstatte en række med summen af den selv og en linearkombination af andre rækker.

Hvis

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} & b_n \end{array}\right]$$

og

$$\left[\begin{array}{cccc|c} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1m} & d_1 \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2m} & d_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nm} & d_n \end{array}\right]$$

er rækkeækvivalente, så skriver vi

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} & b_n \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1m} & d_1 \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2m} & d_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nm} & d_n \end{array}\right].$$

Eksempel 5
Fra eksempel 4 har vi for eksempel

$$\left[\begin{array}{cc|c} 3 & 7 & 2 \\ 3 & 6 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -\frac{5}{3} \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right].$$

Sætning 6
Hvis

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} & b_n \end{array}\right]$$

og

$$\left[\begin{array}{cccc|c} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1m} & d_1 \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2m} & d_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nm} & d_n \end{array}\right]$$

er rækkeækvivalente, da har de tilhørende ligningssystemer præcis samme løsninger.

Eksempel 7
Dette er en fortsættelse af eksemple 4 og eksempel 5.

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -\frac{5}{3} \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

svarer til ligningssystemet

$$\begin{cases} x & = & -\frac{5}{3} \\ y & = & 1 \end{cases}$$

med løsningen

$$\begin{cases} x & = & -\frac{5}{3} \\ y & = & 1 \end{cases}.$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 3 & 7 & 2 \\ 3 & 6 & 1 \end{array}\right]$$

svarer til ligningssystemet

$$\begin{cases} 3x+7y &= 2 \\ 3x+6y &= 1 \end{cases}$$

med løsningen

$$\begin{cases} x &= -\frac{5}{3} \\ y &= 1 \end{cases} .$$

Sætning 8
Følgende generelle metode finder alle forekommende løsninger til et givet lineært ligningssystem. Opskriv den udvidede matrix. Foretag rækkeoperationer af typen R1, R2, R3 indtil en simpel udvidet matrix forekommer, og aflæs løsningen heraf.

Eksempel 9
Ligningssystemet

$$\begin{cases} x & +2y & +3z & = & 4 \\ x & & -z & = & 2 \\ & 2y & +2z & = & 1 \end{cases}$$

ønskes løst. Den tilhørende udvidede matrix opskrives, og der regnes.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \end{array}\right] \overset{r_1-r_2}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \end{array}\right] \overset{r_1-r_3}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \end{array}\right]$$

$$\overset{\substack{\text{række-}\\ \text{ombytning}}}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right] \overset{\substack{r_2/2 \\ r_3/2}}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{array}\right] .$$

Vi har nu to muligheder. Mulighed 1 er at løse ligningssystemet ved at anvende såkaldt baglæns substitution på den sidste matrix. Mulighed 2 er at fortsætte med rækkeoperationerne af typen R1, R2 og R3 for at simplificere den udvidede matrix yderligere. De to muligheder beskrives i det følgende.

mulighed 1:

Af

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{array}\right] \tag{13}$$

aflæser vi, at $z = \frac{1}{2}$. Dette indsættes i ligning to (svarende til række to i (13)

$$y + z = \frac{1}{2}$$

$$\Updownarrow$$

$$y + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\Updownarrow$$

$$y = 0.$$

Og vi indsætter i ligning et (svarende til række et i (13)

$$x - z = 2$$

$$\Updownarrow$$

$$x - \frac{1}{2} = 2$$

$$\Updownarrow$$

$$x = 2\frac{1}{2}.$$

Vi har fundet løsningen $(x, y, z) = (2\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2})$.

<u>mulighed 2:</u>

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{array}\right] \overset{r_2 - r_3}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{array}\right] \overset{r_1 + r_3}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{array}\right]$$

hvoraf løsningen $(x, y, z) = (2\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2})$ *aflæses.*

Metoden fra eksempel 9, hvor mulighed 1 anvendes, kaldes Gauss-elimination med efterfølgende baglæns substitution. Metoden fra eksempel 9, hvor mulighed 2 anvendes, kaldes Gauss-Jordan metoden.

Sætning 10
Et system af n lineære ligninger i n variable har præcis en løsning hvis (og kun hvis) den tilhørende koefficientmatrix har determinant forskellig fra nul.

Eksempel 11
Koefficientmatricen fra eksempel 1 har determinant

$$\begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 18 - 21 = -3 \neq 0.$$

Koefficientmatricen fra eksempel 9 har determinant

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}$$
$$= -(-2) - (4 - 6) = 2 + 2 = 4 \neq 0.$$

Sætning 12
Hvis to kvadratiske (dvs. $n \times n$) matricer A og B opfylder $A \sim B$, da gælder en af følgende sammenhænge

- $|A| = 0 = |B|$
- $|A| \neq 0$ *og* $|B| \neq 0$.