Definition af determinanter

Olav Geil
Februar 2000

I denne note indføres determinanter på en lidt anden måde, end det er gjort i Sydsæter og Hammond's bog *Mathematics for Economic Analysis*. Vi vil hoppe deres afsnit 13.3 over og istedet definere determinanten af den (generelle) $n \times n$-matrix i overensstemmelse med teorien i deres afsnit 13.5.

Først betragter vi 2×2 matricer.

Definition 1
Givet matricen

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

da er determinanten

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

givet ved $|A| = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$.

Remark 2
En måde at huske definition 1 på er ved at bemærke, at leddene $a_{11}a_{22}$ *og* $a_{21}a_{12}$ *så at sige fås ved at "gange over kors".*

Eksempel 3

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 7 \end{vmatrix} &= 2 \cdot 7 - 0 \cdot 3 = 14 - 0 = 14 \\
\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} &= 1 \cdot 3 - 4 \cdot 2 = 3 - 8 = -5 \\
\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} &= 2 \cdot 3 - 2 \cdot 3 = 0.
\end{aligned}$$

Dernæst betragter vi 3×3-matricer

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}.$$

Der gælder følgende meget vigtige sammenhæng:

$$
\begin{aligned}
& a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} && (1)\\
= & -a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{32}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} && (2)\\
= & \ a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} - a_{23}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} + a_{33}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} && (3)\\
= & \ a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} && (4)\\
= & -a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{23}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} && (5)\\
= & \ a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} - a_{32}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} + a_{33}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} && (6)\\
= & \ a_{31}a_{12}a_{23} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{11}a_{23} + a_{32}a_{21}a_{13} + a_{33}a_{11}a_{22} - a_{33}a_{21}a_{12}.
\end{aligned}
$$

Udtrykkene (1),$\cdots$, (6) virker umiddelbart meget indviklede, men der er faktisk et forholdsvis enkelt system i måden, de er skrevet op på. Dette system skal vi gennemskue. Vi får brug for følgende begreb.

Definition 4
Givet en 3×3-matrix A, fjern række i og søjle j. Herved fremkommer en 2×2-matrix. Determinanten af denne 2×2-matrix siges at være en underdeterminant af A og benævnes M_{ij}.

Eksempel 5
Lad

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}.$$

Fjern række et og søjle et. Herved fremkommer

$$\begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{bmatrix}.$$

Underdeterminanten M_{11} er altså

$$M_{11} = \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} = 45 - 48 = -3.$$

Eksempel 6

$$
\begin{aligned}
M_{12} &= \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23} \\
M_{22} &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{33} - a_{31}a_{13}.
\end{aligned}
$$

osv.

Udtrykket (1) siges at være udviklet ud fra søjle et i A, dvs. ud fra

$$\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{bmatrix}.$$

Udtrykket (1) svarer præcis til

$$a_{11}(-1)^{1+1}M_{11} + a_{21}(-1)^{2+1}M_{21} + a_{31}(-1)^{3+1}M_{31}.$$

Udtrykket (2) er udviklet ud fra søjle to i A, og svarer til

$$a_{12}(-1)^{1+2}M_{12} + a_{22}(-1)^{2+2}M_{22} + a_{32}(-1)^{3+2}M_{32}.$$

Udtrykket (3) er udviklet ud fra søjle tre i A, og svarer til

$$a_{13}(-1)^{1+3}M_{13} + a_{23}(-1)^{2+3}M_{23} + a_{33}(-1)^{3+3}M_{33}.$$

Udtrykket (4) er udviklet ud fra række et i A, og svarer til

$$a_{11}(-1)^{1+1}M_{11} + a_{12}(-1)^{1+2}M_{12} + a_{13}(-1)^{1+3}M_{13}.$$

Udtrykket (5) er udviklet ud fra række to i A, og svarer til

$$a_{21}(-1)^{2+1}M_{21} + a_{22}(-1)^{2+2}M_{22} + a_{23}(-1)^{2+3}M_{23}.$$

Udtrykket (6) er udviklet ud fra række tre i A, og svarer til

$$a_{31}(-1)^{3+1}M_{31} + a_{32}(-1)^{3+2}M_{32} + a_{33}(-1)^{3+3}M_{33}.$$

Definition 7
Determinanten $|A|$ af en 3×3-matrix A er givet vha. et vilkårligt af udtrykkene (1),$\cdots$, (6).

Remark 8
Når man skal beregne determinanten af en 3×3-matrix er det nemmest at udvikle ud fra den søjle eller række, hvor der forekommer flest 0'er.

Eksempel 9
Vi ønsker at bestemme determinanten af

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Vi udvikler efter tredie række, da der er flest 0'er her. Vi får

$$\begin{aligned} |A| &= 2(-1)^{3+1}M_{31} + 0(-1)^{3+2}M_{32} + 0(-1)^{3+3}M_{33} \\ &= 2M_{31} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 2(10-12) = -4. \end{aligned}$$

Eksempel 10
Vi ønsker at bestemme determinanten af

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 5 \end{bmatrix}.$$

Der forekommer ingen 0*'er, så vi vælger tilfældigt at udvikle efter søjle et.*

$$\begin{aligned} |A| &= 4(-1)^{1+1}M_{11} + 2(-1)^{2+1}M_{21} + 3(-1)^{3+1}M_{31} \\ &= 4 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \\ &= 4(10-4) - 2(5-4) + 3((2-4) \\ &= 24 - 2 - 6 = 16. \end{aligned}$$

Vi generaliserer nu ovenstående begreber til tilfældet, hvor A er en vilkårlig $n \times n$-matrix, $n \geq 3$.

Definition 11
For $n = 3, 4, \cdots$ *lad* A *være en* $n \times n$*-matrix. For* $i \in \{1, \cdots, n\}$ *og* $j \in \{1, \cdots, n\}$ *fjern række* i *og søjle* j *fra* A *og definer* M_{ij} *til at være determinanten af den herved fremkomne matrix. Vælg en vilkårlig række*

$$(a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{in})$$

i A*. Determinanten* $|A|$ *er givet ved*

$$|A| = a_{i1}(-1)^{i+1}M_{i1} + a_{i2}(-1)^{i+2}M_{i2} + \cdots + a_{in}(-1)^{i+n}M_{in}.$$

Tilsvarende kan vælges en vilkårlig søjle

$$(a_{1j}, a_{2j}, \cdots, a_{nj})$$

i A*, og determinanten* $|A|$ *er givet ved*

$$|A| = a_{1j}(-1)^{1+j}M_{1j} + a_{2j}(-1)^{2+j}M_{2j} + \cdots + a_{nj}(-1)^{n+j}M_{nj}.$$

Eksempel 12
Lad

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}.$$

Vi udvikler efter fjerde række, da der er flest 0*'er her.*

$$\begin{aligned}
|A| &= 2(-1)^{4+1}M_{41}+0(-1)^{4+2}M_{42}+3(-1)^{4+3}M_{43}+0(-1)^{4+4}M_{44}\\
&= -2\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2\\ 0 & 3 & 2\\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 5 & 2 & 2\\ 1 & 0 & 2\\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}\\
&= -2\left(2(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 3 & 2\\ 2 & 2 \end{vmatrix} + 0(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 1 & 2\\ 2 & 2 \end{vmatrix} + 1(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 1 & 2\\ 3 & 2 \end{vmatrix}\right)\\
&\quad -3\left(1(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 2 & 2\\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 0(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 5 & 2\\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 2(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 5 & 2\\ 1 & 1 \end{vmatrix}\right)\\
&= -2\left(2(6-4)+1(2-6)\right)-3\left(-1(4-2)-2(5-2)\right)\\
&= -2(4-4)-3(-2-6)=24.
\end{aligned}$$