# 3. kursusgang: Kurver og bevægelse i rummet

<u>Def.</u> En <u>vektorfunktion</u> er en afbildning

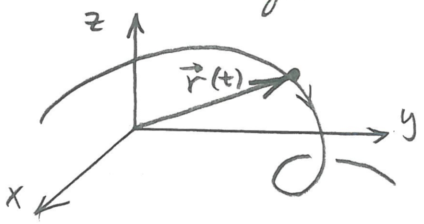
$$\vec{r}(t) = \begin{bmatrix} f(t) \\ g(t) \\ h(t) \end{bmatrix}, \quad t \in I$$

hvor $I$ er et interval og $f(t), g(t), h(t)$ er (kontinuerte) reelle funktioner som er definerede på $I$.

<u>Def.</u> Kurven $C$ hørende til $\vec{r}(t)$, $t \in I$ er punktmængden

$$C = \{ P \in \mathbb{R}^3 \mid \vec{OP} = \vec{r}(t), \ t \in I \}.$$

<u>Fortolkning</u>:

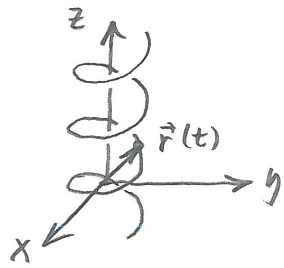



$t$ er tiden.

$\vec{r}(t)$ er stedvektoren for et punkt, der bevæger sig langs $C$.

<u>Eks</u>: Skruelinjen

$$\vec{r}(t) = \begin{bmatrix} \cos t \\ \sin t \\ t \end{bmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}$$



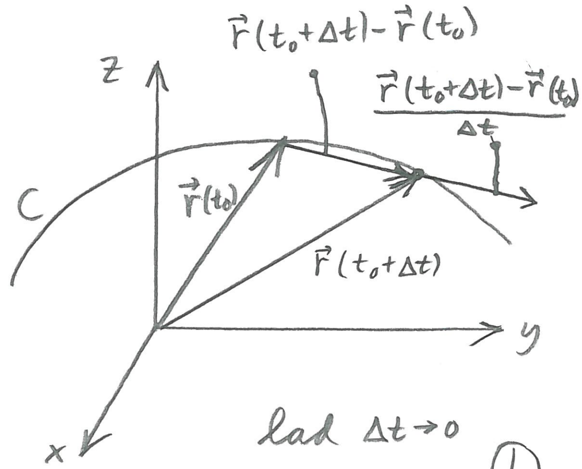

<u>Def.</u>: $$\lim_{t \to a} \vec{r}(t) = \begin{bmatrix} \lim_{t \to a} f(t) \\ \lim_{t \to a} g(t) \\ \lim_{t \to a} h(t) \end{bmatrix}.$$

<u>Def.</u>: Den afledede $\vec{r}\,'(t)$ af vektorfunktionen $\vec{r}(t)$ er defineret som

$$\vec{r}\,'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t}.$$

<u>Fortolkning</u>:

Lad $t_0 \in I$. Hvis $\vec{r}\,'(t_0) \neq \vec{0}$, så er $\vec{r}\,'(t_0)$ en tangentvektor til kurven $C$ i punktet med stedvektor $\vec{r}(t_0)$.



**Sætning**: Hvis $\vec{r}(t) = \begin{bmatrix} f(t) \\ g(t) \\ h(t) \end{bmatrix}$, hvor $f(t)$, $g(t)$ og $h(t)$ er differentiable funktioner, så er

$$\vec{r}\,'(t) = \begin{bmatrix} f'(t) \\ g'(t) \\ h'(t) \end{bmatrix}.$$

**Bevis:**

$$\frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} = \frac{\begin{bmatrix} f(t+\Delta t) - f(t) \\ g(t+\Delta t) - g(t) \\ h(t+\Delta t) - h(t) \end{bmatrix}}{\Delta t} = \begin{bmatrix} \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t} \\ \frac{g(t+\Delta t) - g(t)}{\Delta t} \\ \frac{h(t+\Delta t) - h(t)}{\Delta t} \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} f'(t) \\ g'(t) \\ h'(t) \end{bmatrix}$$

for $\Delta t \to 0$. q.e.d.

**Eks.:** $\vec{r}(t) = \begin{bmatrix} \cos t \\ \sin t \\ t \end{bmatrix} \Rightarrow \vec{r}\,'(t) = \begin{bmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 1 \end{bmatrix}$

**Eks:** $\vec{r}(t) = \begin{bmatrix} 2t^2 \\ 7t+1 \\ 5 \end{bmatrix} \Rightarrow \vec{r}\,'(t) = \begin{bmatrix} 4t \\ 7 \\ 0 \end{bmatrix}$

**Sætning**: Lad $\vec{u}(t)$ og $\vec{v}(t)$ være differentiable vektorfunktioner, $f(t)$ en differentiabel funktion, og $c$ en skalar. Da gælder

(1) $\quad (\vec{u}(t) + \vec{v}(t))' = \vec{u}\,'(t) + \vec{v}\,'(t)$

(2) $\quad (c\vec{u}(t))' = c\vec{u}\,'(t)$

(3) $\quad (f(t)\vec{u}(t))' = f'(t)\vec{u}(t) + f(t)\vec{u}\,'(t)$

(4) $\quad (\vec{u}(t) \cdot \vec{v}(t))' = \vec{u}\,'(t) \cdot \vec{v}(t) + \vec{u}(t) \cdot \vec{v}\,'(t)$

(5) $\quad (\vec{u}(t) \times \vec{v}(t))' = \vec{u}\,'(t) \times \vec{v}(t) + \vec{u}(t) \times \vec{v}\,'(t)$

**Bevis for (4):**

$\vec{u}(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ u_3(t) \end{bmatrix}$, $\vec{v}(t) = \begin{bmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \\ v_3(t) \end{bmatrix}$.

$$\vec{u}(t) \cdot \vec{v}(t) = \sum_{i=1}^{3} u_i(t) v_i(t) \Rightarrow$$

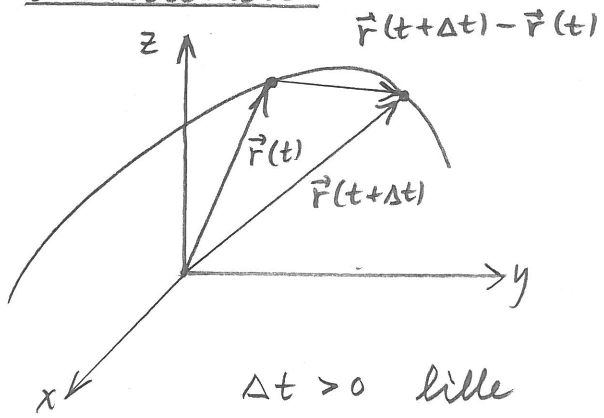
$$(\vec{u}(t) \cdot \vec{v}(t))' = \sum_{i=1}^{3} (u_i'(t) v_i(t) + u_i(t) v_i'(t))$$

$$= \sum_{i=1}^{3} u_i'(t) v_i(t) + \sum_{i=1}^{3} u_i(t) v_i'(t) = \vec{u}\,'(t) \cdot v(t) + \vec{u}(t) \cdot \vec{v}\,'(t)$$

q.e.d.

# Hastighed og acceleration

## Motivation




$\Delta t > 0$ lille

gennemsnitsfart i $[t, t+\Delta t]$:

$$\frac{|\vec{r}(t+\Delta t)-\vec{r}(t)|}{\Delta t} = \left|\frac{\vec{r}(t+\Delta t)-\vec{r}(t)}{\Delta t}\right|$$

fart til tiden $t$:

$$\left|\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\vec{r}(t+\Delta t)-\vec{r}(t)}{\Delta t}\right| = |\vec{r}\,'(t)|$$

! Def. Hastighedsvektoren til tiden $t$ er

$$\vec{v}(t) = \vec{r}\,'(t)$$

Farten er

$$v(t) = |\vec{v}(t)|$$

Bemærk:

$\vec{v}(t)$ — retning: tangential til kurven; længde: farten

! Def. Accelerationsvektoren til tiden $t$ er

$$\vec{a}(t) = \vec{v}\,'(t) = \vec{r}\,''(t).$$

Skalar-accelerationen er $a(t) = |\vec{a}(t)|$.

Eks.

$$\vec{r}(t) = \begin{bmatrix}\cos t\\ \sin t\\ t\end{bmatrix} \Rightarrow \vec{v}(t) = \vec{r}\,'(t) = \begin{bmatrix}-\sin t\\ \cos t\\ 1\end{bmatrix} \Rightarrow \vec{a}(t) = \vec{v}\,'(t) = \begin{bmatrix}-\cos t\\ -\sin t\\ 0\end{bmatrix}$$

$$v(t) = |\vec{v}(t)| = \sqrt{\underbrace{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2}_{1} + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$a(t) = |\vec{a}(t)| = \sqrt{\underbrace{(-\cos t)^2 + (-\sin t)^2}_{1} + 0^2} = 1$$

Bemærk: Farten og skalar-accelerationen er konstante.

$a(t) = 1 \neq v'(t) = (\sqrt{2})' = 0.$

## Integration af vektorfunktioner

Lad $\vec{r}(t) = \begin{bmatrix} f(t) \\ g(t) \\ h(t) \end{bmatrix}$ være en vektorfunktion.

Integralet $\int_a^b \vec{r}(t)\,dt$ defineres som grænseværdien af en middelsum når finheden går mod nul. Dvs. analogt med integralet af en reel funktion.

Sætning:

(1) $$\int_a^b \vec{r}(t)\,dt = \begin{bmatrix} \int_a^b f(t)\,dt \\ \int_a^b g(t)\,dt \\ \int_a^b h(t)\,dt \end{bmatrix}.$$

(2) $$\int_a^b \vec{r}(t)\,dt = \left[\vec{R}(t)\right]_a^b = \vec{R}(b) - \vec{R}(a),$$

hvor $\vec{R}'(t) = \vec{r}(t)$.

Notation:

$\int \vec{r}(t)\,dt = \vec{R}(t) + \vec{C}$ såfremt $\vec{R}'(t) = \vec{r}(t)$.