4. kursusgang: Buelængde og plane kurvers krumning

Lad $\vec{r}(t) = \begin{bmatrix} f(t) \\ g(t) \\ h(t) \end{bmatrix}$, $t \in I$ være en differentiabel vektorfunktion så

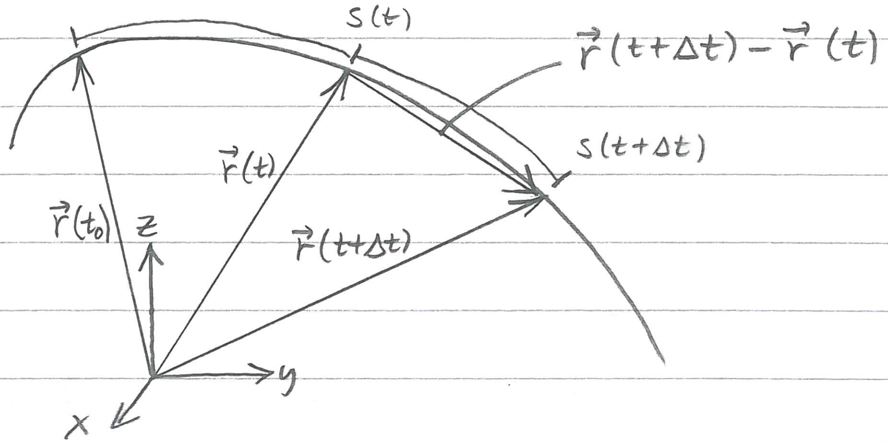
- $\vec{r}\,'(t) \neq \vec{0}$ for alle $t \in I$
- $\vec{r}\,'(t)$ er kontinuert (har kontinuerte koordinatfunktioner)

Betragt den tilhørende <u>parametriserede kurve</u>

$$\overrightarrow{OP_t} = \vec{r}(t) \quad , t \in I.$$

Vælg et $t_0 \in I$ og lad $s(t)$ betegne <u>buelængden</u> (eller <u>kurvelængden</u>) fra $\vec{r}(t_0)$ til $\vec{r}(t)$.

Vi vil finde en formel for $s(t)$.



$\Delta t \neq 0$

Δt lille

Vi har $|s(t+\Delta t) - s(t)| \approx |\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)|$ hvormed

$$\frac{s(t+\Delta t) - s(t)}{\Delta t} \overset{*}{=} \frac{|s(t+\Delta t) - s(t)|}{|\Delta t|} \approx \frac{|\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)|}{|\Delta t|}$$

$$= \left| \frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} \right| \longrightarrow |\vec{r}\,'(t)| \quad \text{for } \Delta t \to 0.$$

Dvs. $s'(t) = |\vec{r}\,'(t)| = v(t)$.

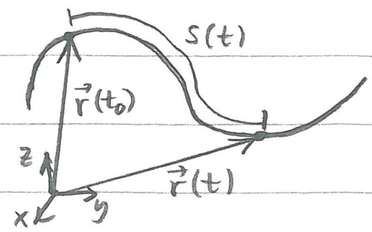
Vi finder $s(t)$ ved integration

$$\int_{t_0}^{t} v(\tau)\,d\tau = [s(\tau)]_{t_0}^{t} = s(t) - s(t_0) = s(t) - 0 = s(t)$$

!Def. Buelængden regnet fra $t = t_0$ er

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} v(\tau)\,d\tau \,,$$

hvor $v(t) = |\vec{r}\,'(t)|$ er farten.



* Tæller og nævner har samme fortegn

Bemærk: $s'(t) = v(t) = |\vec{r}\,'(t)|$.

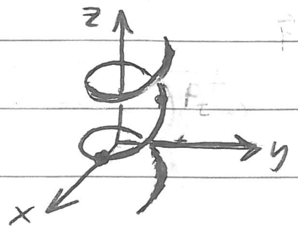
Eks: Skruelinjen. $\vec{r}(t) = \begin{bmatrix} \cos t \\ \sin t \\ t \end{bmatrix} \Rightarrow \vec{r}\,'(t) = \begin{bmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 1 \end{bmatrix}$

$v(t) = |\vec{r}\,'(t)| = \sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2 + 1^2} = \sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t + 1} = \sqrt{2}$

Buelængde regnet fra $t=0$:

$s(t) = \int_0^t v(\tau)\,d\tau = \int_0^t \sqrt{2}\,d\tau$

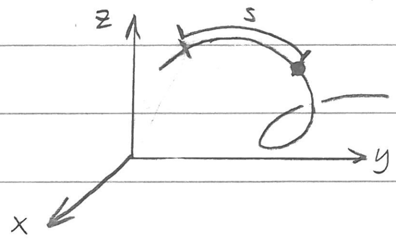
$= [\sqrt{2}\,\tau]_0^t = \sqrt{2}\,t$



Antagelsen $\vec{r}\,'(t) \neq \vec{0}$ giver at $s'(t) = |\vec{r}\,'(t)| > 0$, så $s(t)$ er strengt voksende. Dermed har $s(t)$ en invers funktion som betegnes $t(s)$. Indsættes denne i $\vec{r}(t)$ fås kurven parametriseret ved buelængde:

$$\overrightarrow{OP_s} = \vec{r}(t(s)).$$

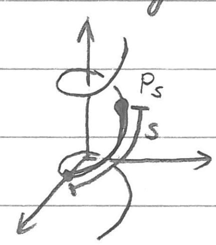
For denne er parameteren s lig buelængden!



Eks: Skruelinjen parametriseret ved buelængde.

$s(t) = \sqrt{2}\,t$ så $t(s) = \frac{s}{\sqrt{2}}$.

$$\overrightarrow{OP_s} = \begin{bmatrix} \cos(\frac{s}{\sqrt{2}}) \\ \sin(\frac{s}{\sqrt{2}}) \\ \frac{s}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}, \quad s \in \mathbb{R}$$



Plane kurvers krumning

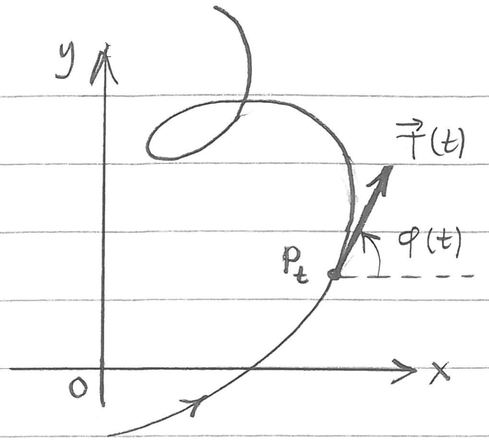
Lad $\vec{r}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}$, $t \in I$ være en to gange differentiabel vektorfunktion med $\vec{r}\,'(t) \neq \vec{0}$ for alle $t \in I$.

Betragt den tilhørende parametriserede plane kurve

$$\overrightarrow{OP_t} = \vec{r}(t), \quad t \in I$$

Hastighed: $\vec{v}(t) = \vec{r}\,'(t) = \begin{bmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{bmatrix}$

Fart: $v(t) = |\vec{v}(t)| = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}$



Enhedstangentvektor :

$$\vec{T}(t) = \frac{\vec{v}(t)}{|\vec{v}(t)|} = \frac{1}{\sqrt{(x')^2+(y')^2}} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos(\varphi(t)) \\ \sin(\varphi(t)) \end{bmatrix} \qquad **$$

<u>Def.</u> Parametriser kurven ved buelængde s:

$$\vec{OP_s} = \vec{r}(t(s)).$$

Da er <u>krumningen</u> i P_s defineret som

$$\kappa(s) = \left| \frac{d\varphi}{ds} \right|.$$

Vi vil udlede en formel for krumningen, der ikke kræver buelængdeparametrisering.

Antag $x'(t) \neq 0$. Af $**$ fås

$$\tan \varphi(t) = \frac{\sin \varphi(t)}{\cos \varphi(t)} = \frac{y'}{x'}$$

hvoraf

$$\varphi(t) = \arctan\left(\frac{y'}{x'}\right) + \begin{cases} \pi & , x' > 0 \\ 0 & , x' < 0 \end{cases}.$$

Ved differentiation fås

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{1}{1+\left(\frac{y'}{x'}\right)^2} \cdot \frac{y''x' - y'x''}{(x')^2} = \frac{y''x' - y'x''}{(x')^2+(y')^2}.$$

Vi har nu

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{d\varphi}{dt} \cdot \frac{dt}{ds} = \frac{d\varphi}{dt} \cdot \frac{1}{\frac{ds}{dt}} = \frac{d\varphi}{dt} \cdot \frac{1}{v} = \frac{d\varphi}{dt} \cdot \frac{1}{\sqrt{(x')^2+(y')^2}}$$

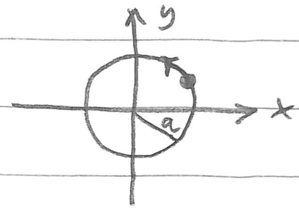
$$= \frac{y''x' - y'x''}{((x')^2+(y')^2)^{3/2}} = \frac{x'y'' - x''y'}{((x')^2+(y')^2)^{3/2}}.$$

Hvis $x'(t) = 0$ er $y'(t) \neq 0$, og et lignende argument giver samme formel. Dvs.

$$\boxed{\kappa(t) = \frac{|x'y'' - x''y'|}{((x')^2+(y')^2)^{3/2}}}$$

Eks. Krumning af en cirkel med radius $a > 0$.

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \vec{r}(t) = a\begin{bmatrix} \cos t \\ \sin t \end{bmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}$$



$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \vec{r}\,'(t) = a\begin{bmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{bmatrix}$$

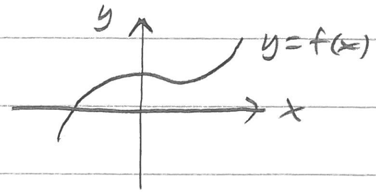
$$\begin{bmatrix} x'' \\ y'' \end{bmatrix} = \vec{r}\,''(t) = a\begin{bmatrix} -\cos t \\ -\sin t \end{bmatrix}$$

$$\kappa(t) = \frac{|a^2\sin^2 t + a^2\cos^2 t|}{(a^2\sin^2 t + a^2\cos^2 t)^{3/2}} = \frac{a^2}{(a^2)^{3/2}} = \frac{a^2}{a^3} = \frac{1}{a}$$

Dvs. krumningen er $\kappa(t) = \dfrac{1}{a}$.

Eks. Krumning af grafen for en reel funktion $y = f(x)$.

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \vec{r}(t) = \begin{bmatrix} t \\ f(t) \end{bmatrix}$$



$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \vec{r}\,'(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ f'(t) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x'' \\ y'' \end{bmatrix} = \vec{r}\,''(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ f''(t) \end{bmatrix}$$

$$\kappa(t) = \frac{|f''(t)|}{(1 + (f'(t))^2)^{3/2}}$$