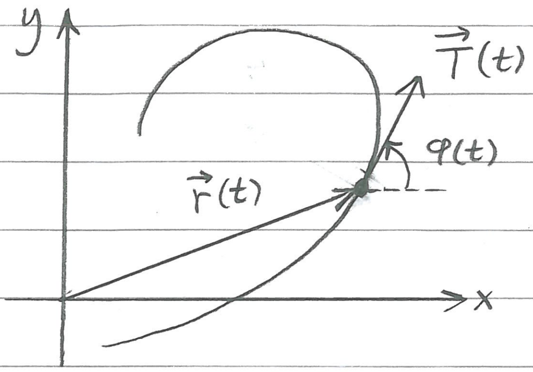
6. kursusgang: Introduktion til funktioner af flere variable.

Krumningscirklen

$$\vec{r}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}, \quad t \in I$$

- To gange differentiabel
- $\vec{r}\,'(t) \neq \vec{0}$ for alle $t \in I$.

Enheds-tangentvektor $\vec{T}(t) = \dfrac{\vec{r}\,'(t)}{|\vec{r}\,'(t)|}$.



$$\vec{T}(t) = \begin{bmatrix} \cos\varphi(t) \\ \sin\varphi(t) \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\vec{T}\,'(t) = \varphi'(t) \begin{bmatrix} -\sin\varphi(t) \\ \cos\varphi(t) \end{bmatrix} \qquad (I)$$

$$|\vec{T}\,'(t)| = |\varphi'(t)| \qquad (II)$$

<u>Husk</u>: Parametriseres kurven ved <u>buelængde</u> s, så er krumningen i $(x(s), y(s))$ defineret som

$$\kappa(s) = |\varphi'(s)|.$$

Af (II) fås $\kappa(s) = |\vec{T}\,'(s)|$

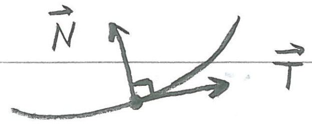
Af (I) fås $\vec{T}(s) \cdot \vec{T}\,'(s) = 0$.

<u>Def.</u> For $\kappa(s) \neq 0$ defineres enheds-normalvektoren som

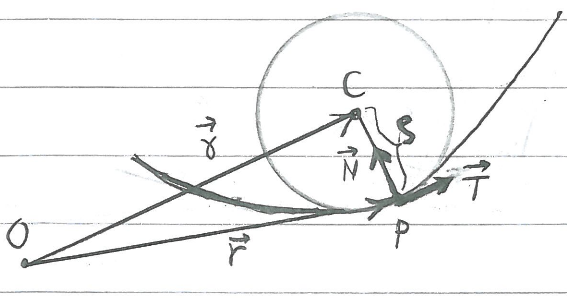
$$\vec{N}(s) = \vec{T}\,'(s) / |\vec{T}\,'(s)|$$

<u>Bemærk</u>: $T'(s) = \kappa(s)\,\vec{N}(s)$.

$\vec{N}$ er enheds-normalvektoren til kurven i den retning kurven bøjer



Krumningscirklen:



- Fælles tangent i P.
- Samme krumning κ i P.

$\rho = \dfrac{1}{\kappa}$ krumningsradius

$\vec{\gamma}$ krumningscentrum

$$\vec{\gamma} = \vec{r} + \rho\vec{N}$$

Funktioner af flere variable

Def. En reel funktion af n variable $f: D \to \mathbb{R}$ består af

- en delmængde $D \subseteq \mathbb{R}^n$ kaldet definitionsmængden.
- en forskrift, der til ethvert $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in D$, tilordner netop et reelt tal $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}$.

Eks: $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$; $f(x,y) = 2x^2 + 5y + 1$

En funktion af 2 variable: x og y.

Definitionsmængden er $\mathbb{R}^2$.

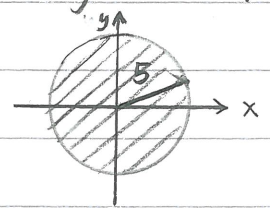
Angives kun en forskrift $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, består definitionsmængden D af alle punkter i $\mathbb{R}^n$, hvor denne giver mening.

Eks: $f(x,y) = \sqrt{25 - x^2 - y^2}$

Vi bestemmer definitionsmængden:

$$25 - x^2 - y^2 \geq 0 \Leftrightarrow 25 \geq x^2 + y^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 \leq 5^2.$$

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 5^2\}$$

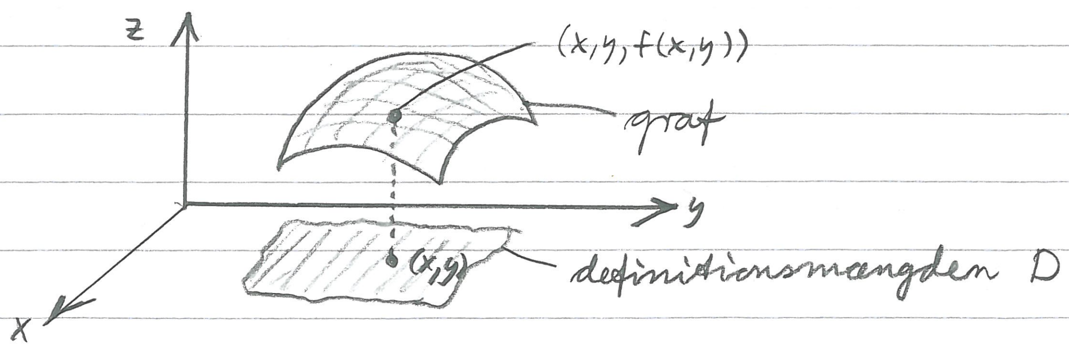


Grafer og niveaukurver

Lad $f: D \to \mathbb{R}$ være en funktion af 2 variable.

Grafen for f er punktmængden

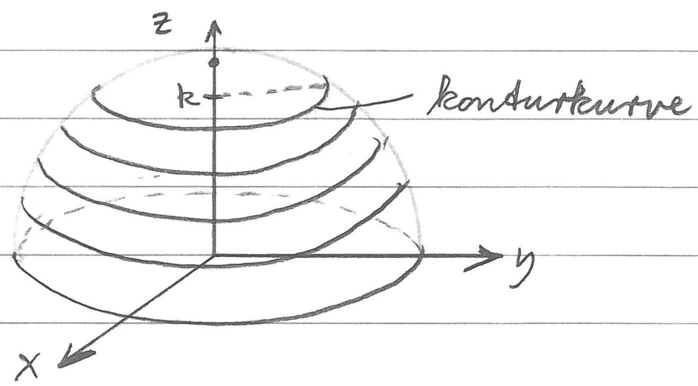
$$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = f(x,y)\}.$$

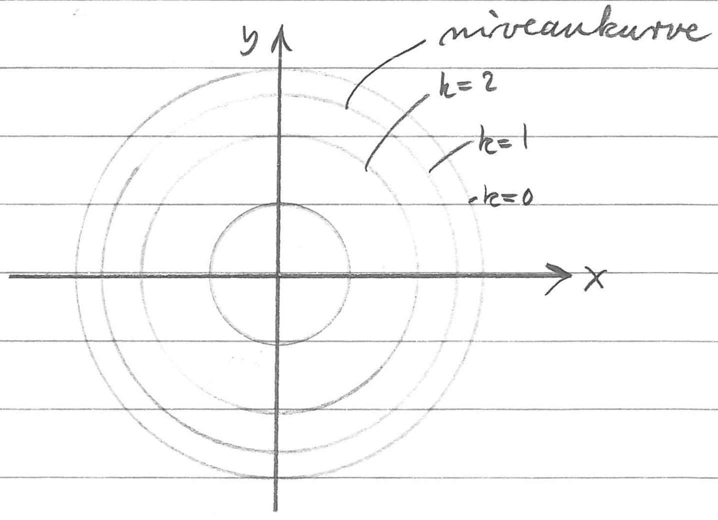


- Konturkurve for højden k : snit (dvs fællesmængde) med den vandrette plan $z=k$.
- Niveaukurve for højden k : projektion af konturkurven på xy-planen. Dvs. kurven i xy-planen med ligningen

$$f(x,y)=k.$$

Eks: $f(x,y)=\sqrt{25-x^2-y^2}$





Grafen er en halvkugle : $x^2+y^2+z^2=5^2 \Leftrightarrow z=\pm\sqrt{25-x^2-y^2}$

Beregning af niveaukurven for højden k : $(0\le k\le 5)$

$$f(x,y)=k \Leftrightarrow \sqrt{25-x^2-y^2}=k \Leftrightarrow 25-x^2-y^2=k^2$$

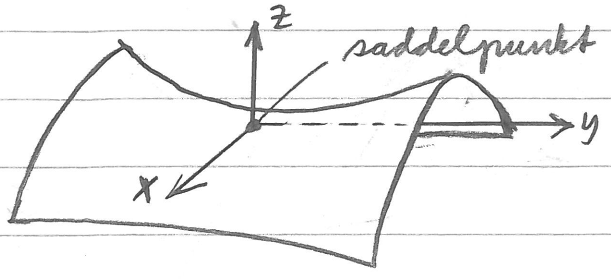
$$\Leftrightarrow x^2+y^2=25-k^2$$

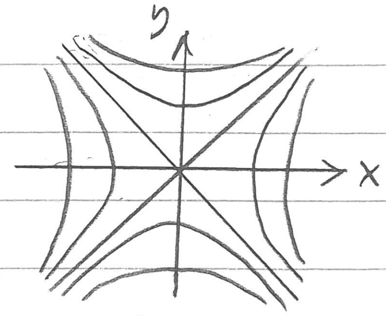
Cirkel med centrum i $(0,0)$ og radius $\sqrt{25-k^2}$.

k	0	1	2	3	4	5
$\sqrt{25-k^2}$	5	$\sqrt{24}$	$\sqrt{21}$	4	3	0

← f. eks.

<u>Eks.</u> $f(x,y) = y^2 - x^2$





<u>Niveauflader</u>

Lad $f: D \to \mathbb{R}$ være en funktion af 3 variable

Graf : $\{(x,y,z,u) \in \mathbb{R}^4 \mid u = f(x,y,z)\}$ kan vi ikke tegne.

Niveauflader : $f(x,y,z) = k$ kan vi tegne for forskellige værdier af k.

<u>Eks</u>: $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$

$f(x,y,z) = k$, $k > 0$ sfære med centrum i $(0,0,0)$ og radius $\sqrt{k}$