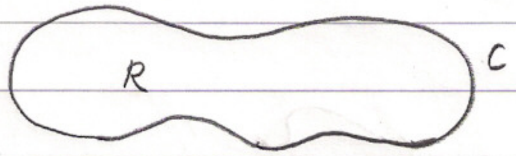
8. kursusgang: Maksimum og minimum for funktioner af flere variable

Lad $f : D \to \mathbb{R}$ være en funktion af to variable

Def.:
- f antager globalt max. M i $(a,b) \in D$ såfremt
  $f(x,y) \leq f(a,b) = M$ for alle $(x,y) \in D$.
- f antager globalt min. m i $(c,d) \in D$ såfremt
  $f(x,y) \geq f(c,d) = m$ for alle $(x,y) \in D$.

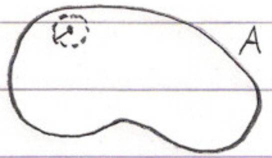
Def.: En simpel lukket kurve C er billedet af en kontinuert parametriseret kurve $\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^2$; $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, der opfylder
- $\gamma(\alpha) = \gamma(\beta)$
- $\gamma : [\alpha, \beta[\to \mathbb{R}^2$ er én til én (ingen selvskæringer).



Sætning 1: Lad $R \subseteq \mathbb{R}^2$ være delmængden bestående af en simpel lukket kurve C samt området indenfor kurven. Antag at $f : R \to \mathbb{R}$ er kontinuert. Da antager f globalt max. i et $(a,b) \in R$ og globalt min. i et $(c,d) \in R$.
(Bevis udeladt)

Def: Lad $A \subseteq \mathbb{R}^2$ og lad $(a,b) \in A$. Da kaldes (a,b) et indre punkt i A, såfremt der findes et $r > 0$ så

$$B_r(a,b) = \{ (x,y) \mid |(a,b) - (x,y)| < r \} \subseteq A.$$



"Punktet ligger ikke på randen"

Def. Hvis (a,b) er et indre punkt i D, siges $f: D \to \mathbb{R}$ at antage <u>lokalt max./min.</u> i (a,b) såfremt f antager globalt max./min. i (a,b) på en cirkelskive indeholdt i D med centrum i (a,b).

<u>Sætning 2.</u> Antag at f antager lokalt max. eller min. i et indre punkt $(a,b) \in D$, hvor $f_x(a,b)$ og $f_y(a,b)$ eksisterer. Da er

$$f_x(a,b) = f_y(a,b) = 0.$$

<u>Bevis:</u>

$G(x) = f(x,b)$, $H(x) = f(a,y)$.

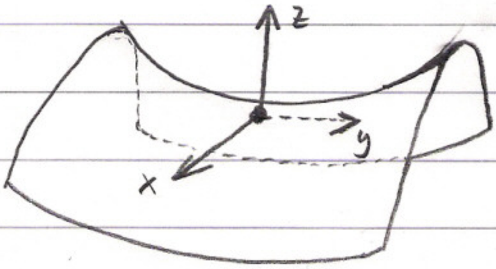
G har lokalt max./min. i a, så $0 = G'(a) = f_x(a,b)$.

H har lokalt max./min. i b, så $0 = H'(b) = f_y(a,b)$. q.e.d.

Det omvendte resultat gælder ikke:

$f(x,y) = y^2 - x^2$

$f_x(x,y) = -2x$, $f_y(x,y) = 2y$ så $f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$.



Saddel punkt.
Ikke lokalt max./min.

Def. Et indre punkt $(a,b) \in D$ kaldes et <u>kritisk punkt</u> for $f: D \to \mathbb{R}$ såfremt ét af følgende gælder:

(1) $f_x(a,b) = f_y(a,b) = 0$.

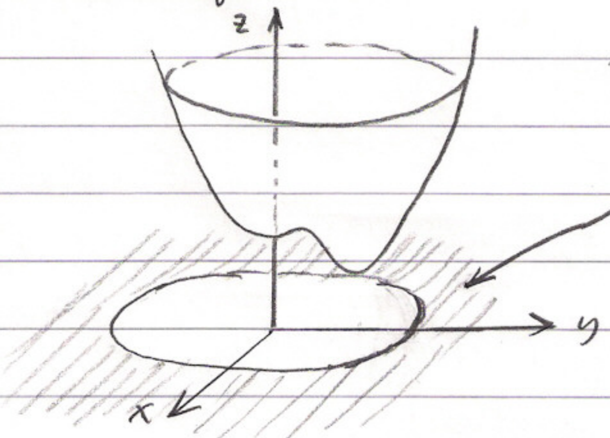
(2) $f_x(a,b)$ eller $f_y(a,b)$ eksisterer ikke.

Ved sætning 1 og sætning 2 fås

§ Sætning 3: Lad $R \subseteq \mathbb{R}^2$ være en delmængde bestående af punkterne på eller indenfor en simpel lukket kurve C. Antag at funktionen f er kontinuert på R. Da antager f globalt max./min. på R enten i

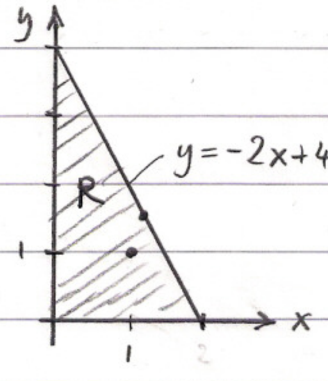
- et kritisk punkt i det indre af R eller i
- et punkt på randen C.

Korollar: Hvis $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ er kontinuert og grafen for f åbner sig op (eller ned) når $\sqrt{x^2+y^2} \to \infty$, så antager f globalt min. (eller max.) i et kritisk punkt.



Vælg cirkelskiven så f antager store værdier udenfor og på randen.

Eks.



$f(x,y) = xy - x - y + 3$, $(x,y) \in R$

Find max. og min.

$f_x(x,y) = y - 1$ og $f_y(x,y) = x - 1$

Eneste kritiske punkt er $(1,1) \in R$.

Vi undersøger randen:

$f(x,0) = -x + 3$, $0 \le x \le 2$, aftagende.

$f(0,y) = -y + 3$, $0 \le y \le 4$, aftagende.

$g(x) = f(x, -2x+4) = x(-2x+4) - x - (-2x+4) + 3 = -2x^2 + 5x - 1$,

$0 \le x \le 2$.

$g'(x) = -4x + 5$,

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{5}{4}$ og $y = -2 \cdot \frac{5}{4} + 4 = \frac{3}{2}$

(x,y)	$(1,1)$	$(0,0)$	$(2,0)$	$(0,4)$	$(\frac{5}{4}, \frac{3}{2})$
$f(x,y)$	2	3	1	-1	2,125
		↑ max.		↑ min.	

Dvs. f antager globalt maksimum i $(0,0)$ og $f(0,0) = 3$.

f antager globalt minimum i $(0,4)$ og $f(0,4) = -1$.

(Bemærk at definitionsmængden for f er trekanten R).

Funktioner af tre variable:

S lukket flade uden selvskæringer.

R består af S og punkterne indenfor S.

$f(x,y,z)$ er kontinuert på R.

Da antager f max. og min. på R.

Kritisk punkt: Et indre punkt $(a,b,c) \in R$ hvor enten

- $f_x(a,b,c) = f_y(a,b,c) = f_z(a,b,c) = 0$ eller
- ikke alle 1. ordens partielle afledede eksisterer.

Max./min. antages i kritisk punkt eller på randen S.