8. kursusgang: Repedition

Partielle afledede

Def.

$$f_x(x,y) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h},$$

$$f_y(x,y) = \lim_{k\to 0} \frac{f(x,y+k)-f(x,y)}{k}.$$

Anden notation

$$f_x(x,y) = \frac{\partial}{\partial x} f(x,y), \quad f_y(x,y) = \frac{\partial}{\partial y} f(x,y).$$

Generelt for $f: D \to \mathbb{R}$ med $D \subseteq \mathbb{R}^n$:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_1,\ldots,x_i+h,\ldots,x_n) - f(x_1,x_2,\ldots,x_n)}{h}.$$

Beregning af $f_x(x,y)$: Betragt y som en konstant og differentier $f(x,y)$ mht. x.

Beregning af $f_y(x,y)$: Betragt x som en konstant og differentier $f(x,y)$ mht. y.

Eks. $f(x,y) = (x^2+y^2)e^{-xy}$.

$$f_x(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}(x^2+y^2)\cdot e^{-xy} + (x^2+y^2)\cdot\frac{\partial}{\partial x}(e^{-xy})$$

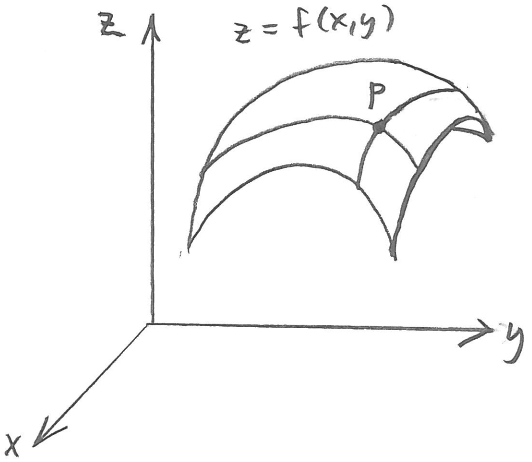
$$= 2x e^{-xy} + (x^2+y^2)(-ye^{-xy})$$

$$= (2x - x^2y - y^3)e^{-xy}.$$

Da x og y indgår symmetrisk i forskriften, fås

$$f_y(x,y) = (2y - xy^2 - x^3)e^{-xy}.$$

Geometrisk :



$P = (a, b, f(a,b))$

x-kurven gennem P :

$z = f(x,b)$, $y = b$.

y-kurven gennem P :

$z = f(a,y)$, $x = a$.

$f_x(a,b)$ er hældningen af tangenten til x-kurven i P.

$f_y(a,b)$ er hældningen af tangenten til y-kurven i P.

Tangentplanen i P : (Defineret når $f_x(x,y)$ og $f_y(x,y)$ er kontinuerte i en cirkelskive med centrum i (a,b)).

Ligning :

$$z - f(a,b) = f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b).$$

Anden ordens partielle afledede :

$$f_{xx} = (f_x)_x \,, \quad f_{xy} = (f_x)_y \,, \quad f_{yx} = (f_y)_x \,, \quad f_{yy} = (f_y)_y$$

<u>Sætning</u> : Hvis f_{xy} og f_{yx} er kontinuerte på en cirkelskive med centrum i (a,b), så er

$$f_{xy}(a,b) = f_{yx}(a,b).$$