9. kursusgang: Kædereglen

Kædereglen for funktioner af én variabel

$$(f(g(t)))' = f'(g(t)) \cdot g'(t).$$

Sætter vi $w = f(x)$ og $x = g(t)$, fås

$$\frac{dw}{dt} = \frac{dw}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}.$$

Sætning (Kædereglen)

Lad f være en funktion af to variable, med kontinuerte første ordens partielle afledede. Sæt $w = f(x,y)$, hvor $x = g(t)$ og $y = h(t)$ er differentiable funktioner af t. Da er w en differentiabel funktion af t, og

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial w}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}.$$

Dvs.

$$(f(g(t), h(t)))' = f_x(g(t), h(t)) \cdot g'(t) + f_y(g(t), h(t)) \cdot h'(t).$$

Eks.

$w = e^{xy}$ med $x = t^2$ og $y = \sin(t)$.

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial w}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}$$

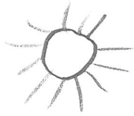
$$= y e^{xy} \cdot 2t + x e^{xy} \cdot \cos(t) = e^{xy}(2ty + x\cos(t))$$

$$= e^{t^2 \sin(t)}(2t\sin(t) + t^2\cos(t))$$

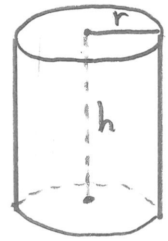
Alternativt:

$$w = e^{t^2 \sin(t)} \Rightarrow \frac{dw}{dt} = e^{t^2\sin(t)}(2t\sin(t) + t^2\cos(t)).$$

Eks.



Smeltende is-cylinder



Rumfang $V = \pi r^2 h$.

$\frac{dh}{dt} = -3 \text{ cm/h}$

$\frac{dr}{dt} = -1 \text{ cm/h}$

$r = 15 \text{ cm}$

$h = 40 \text{ cm}$

Find $\frac{dV}{dt}$.

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial r}\frac{dr}{dt} + \frac{\partial V}{\partial h}\frac{dh}{dt} = 2\pi r h \frac{dr}{dt} + \pi r^2 \frac{dh}{dt}$$

$$= \left(2\pi \cdot 15 \cdot 40 \cdot (-1) + \pi \cdot (15)^2 \cdot (-3)\right) \text{ cm}^3/\text{h}$$

$$= -1875\pi \text{ cm}^3/\text{h} \approx -5890 \text{ cm}^3/\text{h} = \underline{\underline{-5{,}89 \text{ l/h}}}.$$

Bevis-skitse for kædereglen:

Vi viser formlen i $t = t_0$. Lad Δt være en lille tilvækst og sæt

$$a = g(t_0), \quad b = h(t_0),$$

$$\Delta x = g(t_0 + \Delta t) - g(t_0) = g(t_0 + \Delta t) - a,$$

$$\Delta y = h(t_0 + \Delta t) - h(t_0) = h(t_0 + \Delta t) - b.$$

For $w(t) = f(g(t), h(t))$ fås så

$$w(t_0 + \Delta t) - w(t_0) = f(g(t_0 + \Delta t), h(t_0 + \Delta t)) - f(g(t_0), h(t_0))$$

$$= f(a + \Delta x, b + \Delta y) - f(a, b)$$

$$\overset{*)}{\approx} f_x(a,b)\,\Delta x + f_y(a,b)\,\Delta y.$$

Hvormed

$$\frac{w(t_0 + \Delta t) - w(t_0)}{\Delta t} \approx f_x(a,b)\frac{\Delta x}{\Delta t} + f_y(a,b)\frac{\Delta y}{\Delta t}$$

$$\to f_x(a,b)\,g'(t_0) + f_y(a,b)\,h'(t_0) \quad \text{for } \Delta t \to 0.$$

*) Tangentplanen i $(a, b, f(a,b))$ har ligningen

$$z = f(a,b) + f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b).$$

Så for (x,y) tæt på (a,b) er

$$f(x,y) \approx f(a,b) + f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b).$$

Sætning (Den generelle kæderegel)
Antag at $w = f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ og $x_j = g_j(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ for $j = 1, 2, \ldots, m$, alle med kontinuerte 1. ordens partielle afledede. Da er

$$\frac{\partial w}{\partial t_i} = \frac{\partial w}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t_i} + \frac{\partial w}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial t_i} + \ldots + \frac{\partial w}{\partial x_m}\frac{\partial x_m}{\partial t_i}$$

for $i = 1, 2, \ldots, n$.

Def. En funktion af flere variable siges at være kontinuert differentiabel, såfremt alle 1. ordens partielle afledede eksisterer og er kontinuerte.

Implicit differentiation

Hvordan beregnes de partielle afledede af en funktion, der ikke er defineret eksplicit ved en forskrift $z = g(x, y)$, men implicit ved en ligning $F(x, y, z) = 0$?

Sætning (Implicit funktionssætning)
Antag at funktionen $F(x_1, x_2, \ldots, x_n, z)$ er kontinuert differentiabel i en omegn af punktet $(\vec{a}, b) = (a_1, a_2, \ldots, a_n, b)$, hvor

$$F(\vec{a}, b) = 0 \quad \text{og} \quad F_z(\vec{a}, b) \neq 0 .$$

Da findes en kontinuert differentiabel funktion $z = g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ så $g(\vec{a}) = b$ og $F(\vec{x}, g(\vec{x})) = 0$ for ethvert $\vec{x}$ i en omegn af $\vec{a}$. Denne funktion er entydig bestemt for $\vec{x}$ tæt på $\vec{a}$.
(Bevis udeladt).

$\frac{\partial z}{\partial x_i}$ kan beregnes ved kædereglen som følger:

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n, z) = 0 , \text{ hvor } \begin{cases} x_1 = x_1, \\ x_2 = x_2, \\ \vdots \\ x_n = x_n, \\ z = g(x_1, x_2, \ldots, x_n). \end{cases}$$

Herav,

$$\frac{\partial}{\partial x_i} F(x_1, x_2, \dots, x_n, z) = \frac{\partial}{\partial x_i} 0 = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial x_i} + \frac{\partial F}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial x_i} + \dots + \frac{\partial F}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial x_i} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x_i} = 0.$$

Men $\frac{\partial x_j}{\partial x_i} = \begin{cases} 1 & , i = j \\ 0 & , i \neq j \end{cases}$, så vi har

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x_i} = 0.$$

Dvs.

$$\frac{\partial z}{\partial x_i} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_i}}{\frac{\partial F}{\partial z}} \quad , \quad \frac{\partial F}{\partial z} \neq 0.$$

Eks. $z^3 + xz - y^2 - 1 = 0$ nær punktet $(1,3,2)$.

Sæt $F(x,y,z) = z^3 + xz - y^2 - 1$. Vi har $F(1,3,2) = 0$, OK.

$$\frac{\partial F}{\partial x} = z \quad , \quad \frac{\partial F}{\partial y} = -2y \, , \quad \frac{\partial F}{\partial z} = 3z^2 + x .$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}(1,3,2) = 2 \, , \quad \frac{\partial F}{\partial y}(1,3,2) = -6 \quad , \quad \frac{\partial F}{\partial z}(1,3,2) = 13 \neq 0.$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}(1,3) = -\frac{2}{13}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}(1,3) = \frac{6}{13}$$