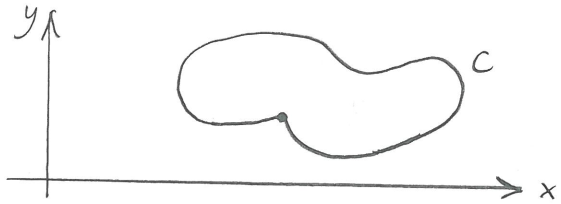
9. kursusgang: Repetition

Max. og min. for funktioner af flere variable

__Def.__ En __simpel lukket kurve__ C er billedet af en kontinuert parametriseret kurve

$$\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^2 \; ; \quad \gamma(t) = (x(t), y(t))$$

med $\gamma(\alpha) = \gamma(\beta)$ og uden selvskæringer.

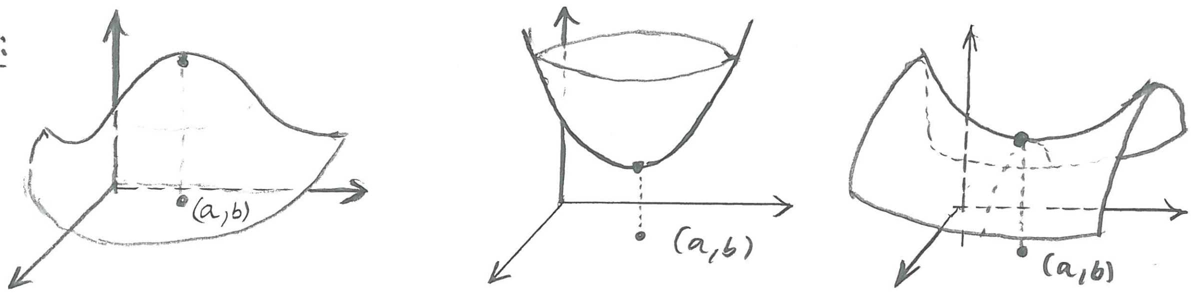


__Def.__ Lad $f : D \to \mathbb{R}$ være en funktion af to variable dvs. $D \subseteq \mathbb{R}^2$. Et indre punkt* $(a,b) \in D$ kaldes et __kritisk punkt__ for f såfremt ét af følgende gælder

(1) $f_x(a,b) = f_y(a,b) = 0$.

(2) $f_x(a,b)$ eller $f_y(a,b)$ eksisterer ikke.

__Eks:__



lokalt max. i (a,b) | lokalt min. i (a,b) | saddelpunkt i (a,b)

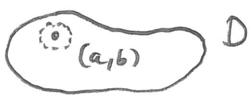
__Sætning:__ Lad $R \subseteq \mathbb{R}^2$ være en delmængde bestående af punkterne på eller indenfor en simpel lukket kurve C. Lad $f(x,y)$ være en kontinuert funktion defineret på R. Da antager f globalt max./min. på R

enten i
- et kritisk punkt i det indre af R

eller i
- et punkt på randen C af R.

---

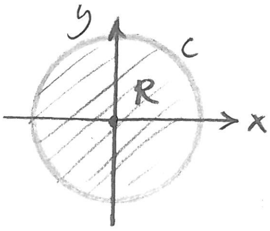
*) Indre punkt:



Ikke på randen af D.

Eks. $R = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \leq 1\}$,

$f(x,y) = x^2 - y^2$.



$\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$; $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$

Simpel lukket kurve OK

f er kontinuert OK

$f_x(x,y) = 2x$, $f_y(x,y) = -2y$.

$f_x(x,y) = 0 \wedge f_y(x,y) = 0 \Leftrightarrow 2x = 0 \wedge -2y = 0 \Leftrightarrow (x,y) = (0,0)$

Dvs eneste kritiske punkt i det indre af R er $(0,0)$.

Vi undersøger randen af R:

$g(t) = (f \circ \gamma)(t) = f(\cos t, \sin t) = \cos^2 t - \sin^2 t = \cos(2t)$.

$t \in [0, 2\pi]$: $g(t)$ antager max. i $t = 0, \pi, 2\pi$ og

$g(0) = g(\pi) = g(2\pi) = 1$. Desuden er $\gamma(0) = \gamma(2\pi) = (1,0)$ og

$\gamma(\pi) = (-1,0)$.

$g(t)$ antager min. i $t = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$ og $g(\frac{\pi}{2}) = g(\frac{3\pi}{2}) = -1$.

Desuden er $\gamma(\frac{\pi}{2}) = (0,1)$ og $\gamma(\frac{3\pi}{2}) = (0,-1)$.

(x,y)	$(0,0)$	$(1,0)$	$(-1,0)$	$(0,1)$	$(0,-1)$
$f(x,y)$	0	1	1	-1	-1

Dvs. f antager globalt maksimum på R i punkterne $(1,0)$, $(-1,0)$ og $f(1,0) = f(-1,0) = 1$.

f antager globalt minimum på R i punkterne $(0,1)$, $(0,-1)$ og $f(0,1) = f(0,-1) = -1$.

Sætning: Hvis $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ er kontinuert, og grafen for f åbner sig op (eller ned) når $\sqrt{x^2+y^2} \to \infty$, så antager f globalt min. (eller max.) i et kritisk punkt.