# 11. kursusgang: Retningsafledet og gradientvektor

Lad $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ være en funktion af $n$ variable.

Sæt $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ og $\vec{e}_i = (0, \dots, 0, \underset{\substack{\uparrow \\ i\text{'te koordinat}}}{1}, 0, \dots, 0)$.

Husk at

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x}) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_1, \dots, x_i + h, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_n)}{h}.$$

Dvs.

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x}) = \lim_{h \to 0} \frac{f(\vec{x} + h\vec{e}_i) - f(\vec{x})}{h}.$$

__Def.__ Lad $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$ være en enhedsvektor.* __Den retningsafledede__ af $f$ i punktet $\vec{x}$ og retningen $\vec{u}$ er

$$D_{\vec{u}} f(\vec{x}) = \lim_{h \to 0} \frac{f(\vec{x} + h\vec{u}) - f(\vec{x})}{h}$$

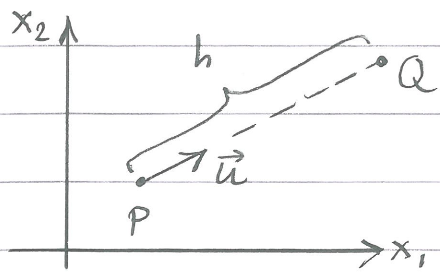
såfremt grænseværdien eksisterer.

__Bemærk:__ $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x}) = D_{\vec{e}_i} f(\vec{x})$.

__Geometrisk fortolkning:__

$w = f(x_1, x_2)$ funktion af to variable, $\vec{x} = (x_1, x_2)$, $\vec{u} \in \mathbb{R}^2$ en enhedsvektor.

Lad $P$ og $Q$ være punkterne med $\vec{OP} = \vec{x}$ og $\vec{OQ} = \vec{x} + h\vec{u}$, hvor $h > 0$.




$$\Delta w = f(Q) - f(P) = f(\vec{x} + h\vec{u}) - f(\vec{x})$$

$$\Delta s = |\vec{PQ}| = h$$

$$\frac{\Delta w}{\Delta s} = \frac{f(\vec{x} + h\vec{u}) - f(\vec{x})}{h} \to D_{\vec{u}} f(\vec{x}).$$

for $h \to 0$.

---

*) Dvs. $|\vec{u}| = 1$

Def. Gradientvektoren af $f$ er

$$\nabla f(\vec{x}) = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{x}), \frac{\partial f}{\partial x_2}(\vec{x}), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{x}) \right).$$

Eks. $f(x,y) = 2x^3 + 2y^3 - 9xy$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 6x^2 - 9y, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 6y^2 - 9x.$$

Dvs. $\nabla f(x,y) = (6x^2 - 9y, 6y^2 - 9x)$.

Sætning* (Kædereglen på vektorform)

Hvis $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ er kontinuert differentiabel, og $\vec{r}(t) = (g_1(t), g_2(t), \ldots, g_n(t))$ er en differentiabel vektorfunktion, så er $f(\vec{r}(t))$ en differentiabel funktion af $t$ med

$$\frac{d}{dt}(f(\vec{r}(t))) = \nabla f(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}\,'(t).$$

Bevis:

$w = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ med $x_i = g_i(t)$ for $i = 1, 2, \ldots, n$.

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial w}{\partial x_2}\frac{dx_2}{dt} + \ldots + \frac{\partial w}{\partial x_n}\frac{dx_n}{dt}$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{r}(t))\, g_1'(t) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(\vec{r}(t))\, g_2'(t) + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{r}(t))\, g_n'(t)$$

$$= \nabla f(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}\,'(t)$$

q.e.d.

! Sætning: Hvis $f$ er kontinuert differentiabel i $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, og $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$ er en enhedsvektor, da eksisterer $D_{\vec{u}} f(\vec{x})$ og

$$D_{\vec{u}} f(\vec{x}) = \nabla f(\vec{x}) \cdot \vec{u}$$

Bevis:

Lad $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ og sæt $\vec{r}(t) = \vec{x}_0 + t\vec{u}$. Bemærk at $\vec{r}\,'(t) = \vec{u}$.

$$D_{\vec{u}} f(\vec{x}_0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(\vec{x}_0 + t\vec{u}) - f(\vec{x}_0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{f(\vec{r}(t)) - f(\vec{r}(0))}{t} =$$

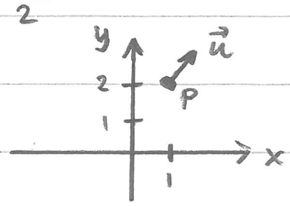
$$\frac{d}{dt}(f(\vec{r}(t)))(0) = \nabla f(\vec{r}(0)) \cdot \vec{r}\,'(0) = \nabla f(\vec{x}_0) \cdot \vec{u}$$

q.e.d.

---

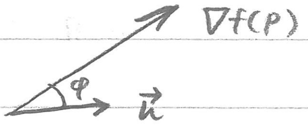
*) Husk: $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n$.

Eks: $f(x,y) = 2x^3 + 2y^3 - 9xy$ som ovenfor.
$P = (1,2)$ og $\vec{u} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)$.
Vi har $\nabla f(P) = (6\cdot 1^2 - 9\cdot 2,\ 6\cdot 2^2 - 9\cdot 1) = (-12, 15)$ og
$$D_{\vec{u}} f(P) = \nabla f(P)\cdot\vec{u} = (-12,15)\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1) = \frac{1}{\sqrt{2}}(-12\cdot 1 + 15\cdot 1)$$
$$= \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$




Sætning: Antag at $f$ er kontinuert differentiabel i et punkt $P$, og at $\nabla f(P) \neq \vec{0}$. Da er den retningsafledede $D_{\vec{u}} f(P)$ størst i gradientens retning dvs. for $\vec{u} = \nabla f(P) / |\nabla f(P)|$. Værdien af den største retningsafledede er $|\nabla f(P)|$.

Bevis: (for $n=2$ eller $n=3$)*
$$D_{\vec{u}} f(P) = \nabla f(P)\cdot\vec{u} = |\nabla f(P)|\,|\vec{u}|\cos(\varphi) = |\nabla f(P)|\cos(\varphi)$$

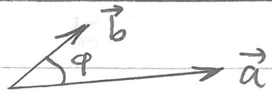



Maksimal for $\cos(\varphi) = 1$ dvs for $\varphi = 0$.
Her er $\vec{u} = \nabla f(P)/|\nabla f(P)|$ og
$D_u f(P) = |\nabla f(P)|$ q.e.d.

Bemærk: Den retningsafledede er mindst i retning modsat gradienten, og mindsteværdien er $-|\nabla f(P)|$.

Betragt en flade med ligningen
$$F(x,y,z) = 0, \qquad (\star)$$
hvor $F$ er kontinuert differentiabel. Lad $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ være et punkt på fladen (dvs $F(P_0)=0$) hvor $\nabla F(P_0) \neq \vec{0}$. Da $\frac{\partial F}{\partial x}(P_0)$, $\frac{\partial F}{\partial y}(P_0)$ eller $\frac{\partial F}{\partial z}(P_0)$ er forskellig fra nul, fås ved implicit funktions sætning at $(\star)$ beskriver en graf nær $P_0$ (Dvs. $x = g(y,z)$, $y = h(x,z)$ eller $z = k(x,y)$).

* Husk $\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos(\varphi)$



**Sætning:** Lad $\vec{r}(t)$, $t \in I$ være en differentiabel vektorfunktion med $F(\vec{r}(t)) = 0$ for alle $t \in I$. Antag at $\vec{r}(t_0) = P_0$ og $\vec{r}\,'(t_0) \neq \vec{0}$ for et $t_0 \in I$. Da er

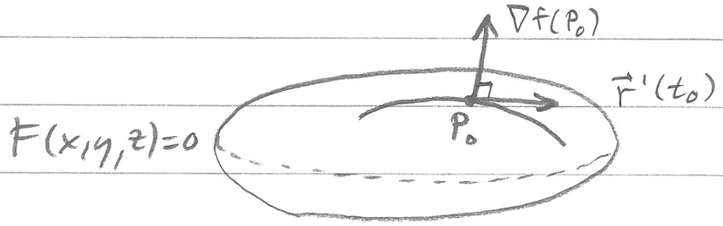
$$\nabla F(P_0) \cdot \vec{r}\,'(t_0) = 0$$

dvs. $\nabla F(P_0)$ og $\vec{r}\,'(t_0)$ er ortogonale.

**Bevis:**

$$0 = F(\vec{r}(t)) \Rightarrow 0 = \frac{d}{dt}\left(F(\vec{r}(t))\right) = \nabla F(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}\,'(t) \Rightarrow$$

$$0 = \nabla F(\vec{r}(t_0)) \cdot \vec{r}\,'(t_0) = \nabla F(P_0) \cdot \vec{r}\,'(t_0) \,. \qquad \text{q.e.d.}$$




Planen gennem $P_0$ med normalvektor $\nabla F(P_0) \neq \vec{0}$ har ligningen

$$\nabla F(P_0) \cdot \left( (x,y,z) - (x_0,y_0,z_0) \right) = 0$$

Dvs.

$$\boxed{F_x(x_0,y_0,z_0)(x-x_0) + F_y(x_0,y_0,z_0)(y-y_0) + F_z(x_0,y_0,z_0)(z-z_0) = 0}$$

Denne plan kaldes <u>tangentplanen</u> i $P_0$ til fladen med ligning $F(x,y,z) = 0$.