12. kursusgang: Integration af funktioner af to variable I

Motivation: Beregning af volumen under grafen for en ikke-negativ funktion af to variable.

Lad R være et rektangel

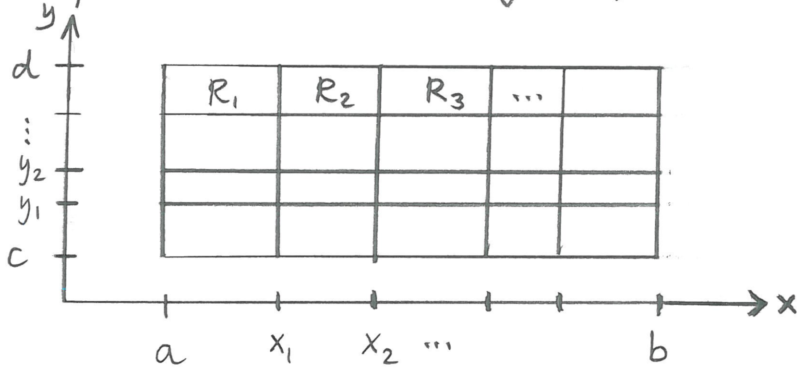
$$R = \{(x,y) \mid a \le x \le b,\ c \le y \le d\},$$

og lad f være en kontinuert funktion defineret på R. En inddeling $\mathcal{P}$ af R defineres ved

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_m = b,$$

$$c = y_0 < y_1 < y_2 < \dots < y_n = d.$$

$\mathcal{P}$ består af $k = mn$ rektangler, $\mathcal{P} = \{R_1, R_2, \dots, R_k\}$.



Definer finheden af inddelingen som

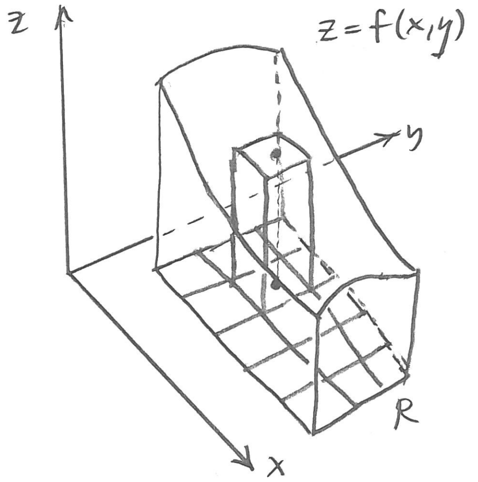
$$|\mathcal{P}| = \max_{1 \le i \le k} |\mathrm{diag}(R_i)|,$$

hvor $|\mathrm{diag}(R_i)|$ er længden af diagonalen i R_i.

Lad ΔA_i betegne arealet af R_i. Vælg et punkt $(x_i^*, y_i^*) \in R_i$ for $i = 1, 2, \dots, k$. Riemann-summen hørende til inddelingen $\mathcal{P}$ og valget af punkter $(x_i^*, y_i^*) \in R_i$ er

$$\sum_{i=1}^{k} f(x_i^*, y_i^*)\, \Delta A_i .$$

Fortolkning når $f(x,y) \geq 0$ for alle $(x,y) \in R$:



Volumen af i'te søjle er

$$f(x_i^*, y_i^*)\,\Delta A_i .$$

Riemann-summen er en tilnærmelse til volumen over R og under grafen.

<u>Def.</u> <u>Dobbeltintegralet</u> af f over R defineres som

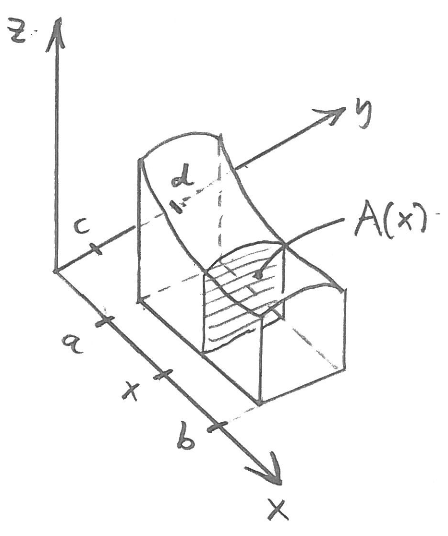
$$\iint_R f(x,y)\,dA = \lim_{|P|\to 0} \sum_{i=1}^{k} f(x_i^*, y_i^*)\,\Delta A_i$$

(Man kan vise at grænseværdien eksisterer når f er kontinuert på R.)

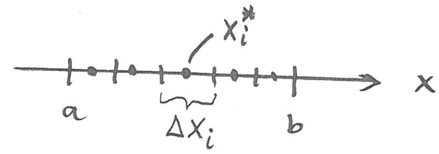
<u>Sætning</u>: Antag at $f(x,y)$ er kontinuert på rektanglet $R = \{(x,y) \mid a \leq x \leq b,\ c \leq y \leq d\}$. Da er

$$\iint_R f(x,y)\,dA = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,dx \right) dy .$$

<u>Idé i beviset</u>: "Salami metoden"



$$A(x) = \int_c^d f(x,y)\,dy$$



$$\iint_R f(x,y)\,dA \approx \sum_{i=1}^{m} A(x_i^*)\,\Delta x_i$$

$$\approx \int_a^b A(x)\,dx = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy \right) dx$$

Eks. $f(x,y) = 4x^3 + 6xy^2$,
$R = [1,3] \times [-2,1] = \{(x,y) \mid 1 \le x \le 3, -2 \le y \le 1\}$.

$$\iint_R f(x,y)\,dA = \int_1^3 \int_{-2}^1 (4x^3 + 6xy^2)\,dy\,dx$$

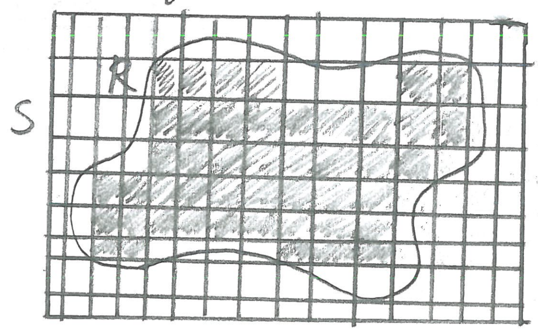
$$= \int_1^3 \left[4x^3y + 2xy^3\right]_{y=-2}^{y=1} dx = \int_1^3 (4x^3 + 2x - (-8x^3 - 16x))\,dx$$

$$= \int_1^3 (12x^3 + 18x)\,dx = \left[3x^4 + 9x^2\right]_1^3 = 3 \cdot 81 + 81 - (3+9) = \underline{\underline{313}}$$

Bemærk at beregning af $\int_{-2}^1 \int_1^3 (4x^3 + 6xy^2)\,dx\,dy$ vil give det samme resultat.

Dobbeltintegraler over mere generelle områder

Lad $R \subseteq \mathbb{R}^2$ være begrænset, dvs. der findes et rektangel S så $R \subseteq S$. Lav en inddeling $\mathcal{Q} = \{S_1, S_2, \ldots, S_\ell\}$ af S som før, og lad $\mathcal{P} = \{R_1, R_2, \ldots, R_k\}$ bestå af de rektangler, der er helt indeholdt i R.



$\mathcal{P}$ kaldes den indre inddeling.

Finheden af $\mathcal{P}$ er $|\mathcal{P}| = |\mathcal{Q}|$

ΔA_i er arealet af R_i

Vælg $(x_i^*, y_i^*) \in R_i$ for $i = 1, 2, \ldots, k$.

Riemann-sum : $\sum_{i=1}^k f(x_i^*, y_i^*)\,\Delta A_i$

Def.
$$\iint_R f(x,y)\,dA = \lim_{|\mathcal{P}| \to 0} \sum_{i=1}^k f(x_i^*, y_i^*)\,\Delta A_i,$$

såfremt grænseværdien eksisterer. Mere præcist

Def. Hvis der findes et tal I så der for ethvert $\varepsilon > 0$ findes et $\delta > 0$ så

$$\left| \sum_{i=1}^{k} f(x_i^*, y_i^*) \Delta A_i - I \right| < \varepsilon$$

for enhver indre inddeling $\mathcal{P} = \{R_1, R_2, \dots, R_k\}$ af R med finhed $|\mathcal{P}| < \delta$ og ethvert valg af punkter $(x_i^*, y_i^*) \in R_i$, da siges f at være integrabel på R og

$$\iint_R f(x,y)\, dA = I.$$

Bemærk: Stemmer overens med tidligere definition, når R er et rektangel.

Bemærk: Man kan vise at hvis f er kontinuert, og randen på det begrænsede område er "pæn" (dvs. har areal 0, kan gå galt hvis randkurven f.eks. er en fraktal), da er f integrabel på R.

Def.

- Et område, der kan skrives som

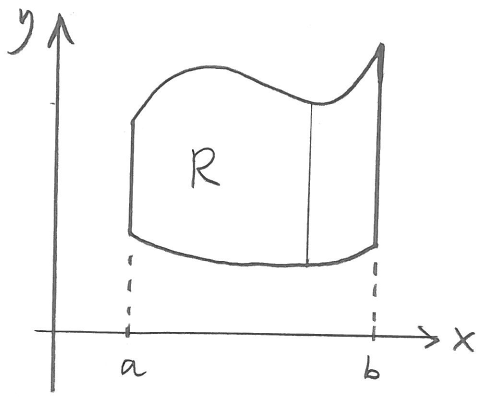
$$R = \{(x,y) \mid a \le x \le b,\ y_1(x) \le y \le y_2(x)\}, \qquad \text{I}$$

hvor $y_1(x)$ og $y_2(x)$ er kontinuerte funktioner på $[a,b]$, kaldes vertikalt simpel.

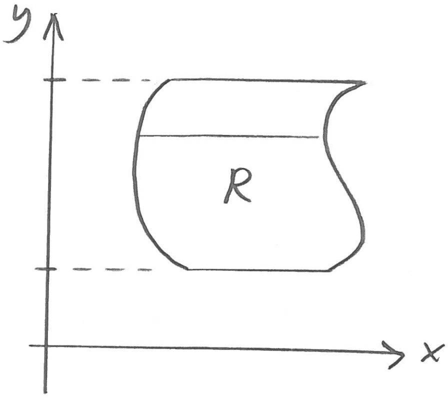
- Et område, der kan skrives som

$$R = \{(x,y) \mid c \le y \le d,\ x_1(y) \le x \le x_2(y)\}, \qquad \text{II}$$

hvor $x_1(y)$ og $x_2(y)$ er kontinuerte funktioner på $[c,d]$, kaldes horisontalt simpel.



vertikalt simpel



horisontalt simpel

<u>Sætning</u>: Antag at funktionen $f(x,y)$ er kontinuert på $R \subseteq \mathbb{R}^2$.

- Hvis R er vertikalt simpel, som I, så er

$$\iint_R f(x,y)\,dA = \int_a^b \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\,dy\,dx .$$

- Hvis R er horisontalt simpel, som II, så er

$$\iint_R f(x,y)\,dA = \int_c^d \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)\,dx\,dy .$$