12. kursusgang: Repetition

Retningsafledet og gradientvektor

$f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ funktion af n variable

$\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$

$\vec{u} \in \mathbb{R}^n$ en enhedsvektor dvs. $|\vec{u}| = 1$.

Def. (Retningsafledede)

$$D_{\vec{u}} f(\vec{x}) = \lim_{h \to 0} \frac{f(\vec{x} + h\vec{u}) - f(\vec{x})}{h}$$

Def. (Gradient)

$$\nabla f(\vec{x}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{x}), \frac{\partial f}{\partial x_2}(\vec{x}), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{x}) \right).$$

For $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ og $\vec{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ er

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n \quad \text{prikprodukt}$$

$$|\vec{x}| = \sqrt{\vec{x} \cdot \vec{x}} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2} \quad \text{længde}$$

Sætning: Hvis f er (kontinuert) differentiabel i $P \in \mathbb{R}^n$, så er

$$D_{\vec{u}} f(P) = \nabla f(P) \cdot \vec{u}.$$

For $\nabla f(P) \neq \vec{0}$, er $D_{\vec{u}} f(P)$ størst når $\vec{u} = \frac{\nabla f(P)}{|\nabla f(P)|}$ og størsteværdien er $|\nabla f(P)|$.

Eks. $f(x,y) = x^3 - x^2 y + x y^2 + y^3$; $P = (1,-1)$; $\vec{v} = (2,3)$

Find $D_{\vec{u}} f(P)$, hvor $\vec{u} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 2xy + y^2 \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -x^2 + 2xy + 3y^2.$$

$$\nabla f(x,y) = (3x^2 - 2xy + y^2, -x^2 + 2xy + 3y^2).$$

$$\nabla f(P) = (3\cdot 1^2 - 2\cdot 1\cdot(-1) + (-1)^2,\ -1^2 + 2\cdot 1\cdot(-1) + 3\cdot(-1)^2) = (6,0).$$

$$\vec{u} = \frac{1}{\sqrt{2^2+3^2}}(2,3) = \frac{1}{\sqrt{13}}(2,3).$$

$$D_u f(P) = \nabla f(P)\cdot\vec{u} = (6,0)\cdot\frac{1}{\sqrt{13}}(2,3) = \frac{1}{\sqrt{13}}(6\cdot 2 + 0\cdot 3)$$
$$= \frac{12}{\sqrt{13}} = \underline{\underline{\frac{12\sqrt{13}}{13}}}$$

<u>Kædereglen</u>:

$$\frac{d}{dt}\left(f(\vec{r}(t))\right) = \nabla f(\vec{r}(t))\cdot\vec{r}\,'(t),$$

når f er kontinuert differentiabel og $\vec{r}$ er differentiabel.

Betragt en flade med ligning

$$F(x,y,z) = 0,$$

hvor F er kont. diff. Lad $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ være et punkt på fladen (dvs. $F(P_0)=0$) hvor $\nabla F(P_0) \neq \vec{0}$. Tangentplanen i P_0 har ligningen

$$F_x(x_0,y_0,z_0)(x-x_0) + F_y(x_0,y_0,z_0)(y-y_0) + F_z(x_0,y_0,z_0)(z-z_0) = 0.$$

Bemærk at $\nabla F(P_0)$ er en normalvektor for tangentplanen.