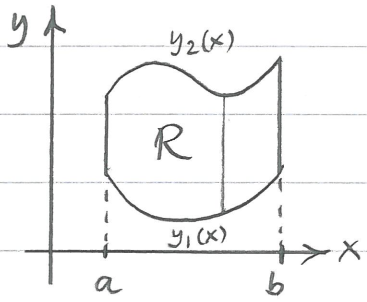
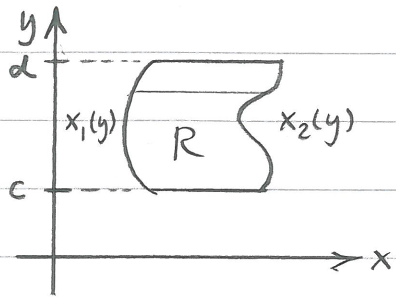
13. kursusgang: Integration af funktioner af to variable II

Def. • En delmængde af planen, der kan skrives som
$$R = \{(x,y) \mid a \le x \le b,\ y_1(x) \le y \le y_2(x)\}, \qquad \text{I}$$
hvor $y_1(x)$ og $y_2(x)$ er kontinuerte funktioner på $[a,b]$, kaldes <u>vertikalt simpel</u>.

• En delmængde af planen, der kan skrives som
$$R = \{(x,y) \mid c \le y \le d,\ x_1(y) \le x \le x_2(y)\}, \qquad \text{II}$$
hvor $x_1(y)$ og $x_2(y)$ er kontinuerte funktioner på $[c,d]$, kaldes <u>horisontalt simpel</u>.



Vertikalt simpel



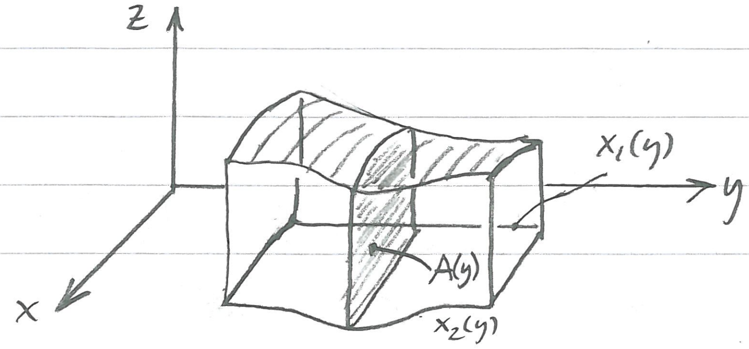
Horisontalt simpel

! <u>Sætning</u>: Antag at $f(x,y)$ er kontinuert på $R \subseteq \mathbb{R}^2$.

• Hvis R er vertikalt simpel, som I, så er
$$\iint_R f(x,y)\,dA = \int_a^b \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\,dy\,dx .$$

• Hvis R er horisontalt simpel, som II, så er
$$\iint_R f(x,y)\,dA = \int_c^d \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)\,dx\,dy .$$

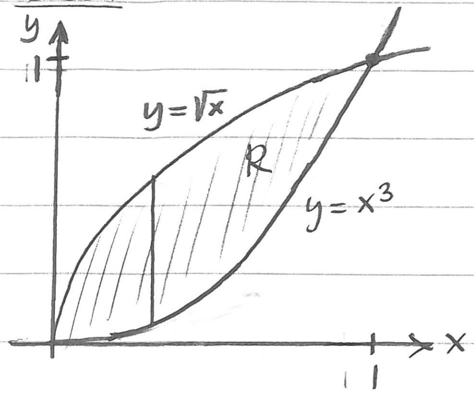
<u>Idé i beviset:</u>



$$A(y) = \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)\,dx$$

$$\iint_R f(x,y)\,dA = \int_c^d A(y)\,dy.$$

__Eks.__



$$f(x,y) = xy^2$$

$$R = \{(x,y) \mid 0 \le x \le 1,\ x^3 \le y \le \sqrt{x}\}$$

Vertikalt simpelt

$$\iint_R f(x,y)\,dA = \int_0^1 \int_{x^3}^{\sqrt{x}} xy^2\,dy\,dx = \int_0^1 \left[\tfrac{1}{3}xy^3\right]_{y=x^3}^{y=\sqrt{x}} dx =$$

$$\int_0^1 \left(\tfrac{1}{3}x^{\frac{5}{2}} - \tfrac{1}{3}x^{10}\right)dx = \left[\tfrac{2}{21}x^{\frac{7}{2}} - \tfrac{1}{33}x^{11}\right]_0^1 = \tfrac{2}{21} - \tfrac{1}{33} = \underline{\underline{\tfrac{5}{77}}}$$

Bemærk at R også er horisontalt simpel:

$x \geq 0: \quad y = \sqrt{x} \Leftrightarrow x = y^2 \quad$ og $\quad y = x^3 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{y} \quad$ så

$R = \{(x,y) \mid 0 \le y \le 1,\ y^2 \le x \le \sqrt[3]{y}\}$.

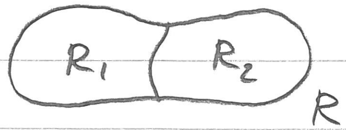
Dermed er

$$\iint_R f(x,y)\,dA = \int_0^1 \int_{y^2}^{\sqrt[3]{y}} xy^2\,dx\,dy.$$

Udregnes dette, fås samme resultat $\frac{5}{77}$.

__Egenskaber ved dobbeltintegraler__

- $\iint_R c\,f(x,y)\,dA = c\iint_R f(x,y)\,dA$
- $\iint_R (f(x,y)+g(x,y))\,dA = \iint_R f(x,y)\,dA + \iint_R g(x,y)\,dA$
- Hvis $f(x,y) \le g(x,y)$ for alle $(x,y) \in R$, så er
  $\iint_R f(x,y)\,dA \le \iint_R g(x,y)\,dA$.
- Hvis $m \le f(x,y) \le M$ for alle $(x,y) \in R$, så er
  $m\,a(R) \le \iint_R f(x,y)\,dA \le M\,a(R)$,
  hvor $a(R)$ betegner arealet af R.
- $\iint_R f(x,y)\,dA = \iint_{R_1} f(x,y)\,dA + \iint_{R_2} f(x,y)\,dA$, hvor



Areal og volumen

Def. Lad $R \subseteq \mathbb{R}^2$ være en begrænset delmængde med rand. Antag at $f(x,y)$ er kontinuert på R, samt at $f(x,y) \geq 0$ for alle $(x,y) \in R$.
Da er volumen V af mængden

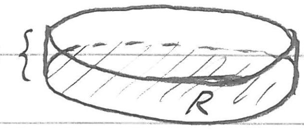
$$\{(x,y,z) \mid (x,y) \in R \ , \ 0 \leq z \leq f(x,y)\}$$

defineret som

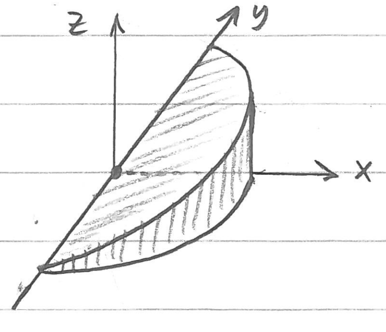
$$V = \iint_R f(x,y)\, dA .$$

Bemærk: Volumen af $\{(x,y,z) \mid (x,y) \in R \ , \ 0 \leq z \leq 1\}$ er det samme som arealet $a(R)$ af R. Dvs.

$$\boxed{a(R) = \iint_R 1 \, dA}$$

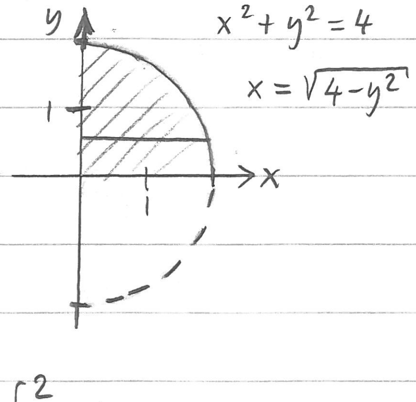


Eks. Volumen af cylinderudsnit



$$f(x,y) = x$$

$$R = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leq 4 \ , \ x \geq 0\}$$



$$V = \iint_R f(x,y)\, dA$$

$$= 2\int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-y^2}} x \, dx\, dy$$

$$= 2\int_0^2 \left[\tfrac{1}{2}x^2\right]_{x=0}^{x=\sqrt{4-y^2}} dy$$

$$= 2\int_0^2 \tfrac{1}{2}(4-y^2)\,dy = \int_0^2 (4-y^2)\,dy = \left[4y - \tfrac{1}{3}y^3\right]_0^2 = 8 - \tfrac{8}{3} = \underline{\underline{\tfrac{16}{3}}}$$

Volumen mellem to grafer

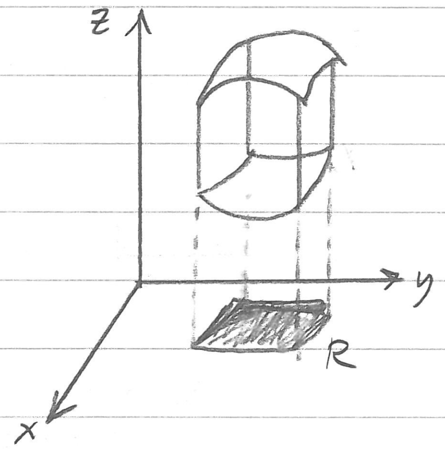
Antag at $z_1(x,y)$ og $z_2(x,y)$ er kontinuerte funktioner på R, samt at $z_1(x,y) \leq z_2(x,y)$ for alle $(x,y) \in R$. Da er volumen af mængden

$$\{(x,y,z) \mid (x,y) \in R \ , \ z_1(x,y) \leq z \leq z_2(x,y)\}$$

givet ved

$$V = \iint_R (z_2(x,y) - z_1(x,y))\, dA \ .$$

<u>Bemærk</u>: Vi kræver ikke at $z_1(x,y)$ og $z_2(x,y)$ er ikke-negative.



<u>Begrundelse</u>: Parallelforskyd langs z-aksen, så ikke negative:

$$z_2(x,y) + m \geq z_1(x,y) + m \geq 0 .$$

$$V = \iint_R (z_2(x,y)+m)\,dA - \iint_R (z_1(x,y)+m)\,dA$$

$$= \iint_R (z_2(x,y) - z_1(x,y))\,dA \qquad \text{OK.}$$