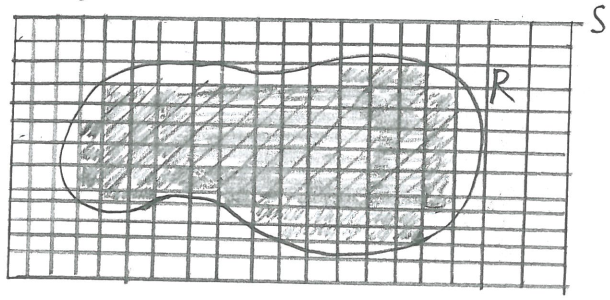
# 13. kursusgang: Repetition

## Integration af funktioner af to variable

### Definition af dobbeltintegralet

Lad $R \subseteq \mathbb{R}^2$ være en begrænset delmængde med rand, og lad $f(x,y)$ være en kontinuert funktion defineret på $R$.

- Vælg et rektangel $S$ så $R \subseteq S$



- $\mathcal{Q} = \{S_1, S_2, \ldots, S_l\}$ inddeling af $S$ i $l$ delrektangler.
- $\mathcal{P} = \{R_1, R_2, \ldots, R_k\}$ delrektangler helt indeholdt i $R$.
- Finhed

$$|\mathcal{P}| = |\mathcal{Q}| = \max_{1 \le i \le l} |\operatorname{diag}(S_i)|.$$

- $\Delta A_i$ arealet af $R_i$
- $(x_i^*, y_i^*)$ punkt i $R_i$

Riemann-sum:

$$\sum_{i=1}^{k} f(x_i^*, y_i^*) \Delta A_i$$

Def.:

$$\iint_R f(x,y)\, dA = \lim_{|\mathcal{P}| \to 0} \sum_{i=1}^{k} f(x_i^*, y_i^*) \Delta A_i .$$

Husk: Beregning af integraler af funktioner af én variabel:

$$\int_a^b f(x)\, dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a),$$

hvor $F'(x) = f(x)$.

**Sætning**: Lad $R$ være et rektangel

$$R = [a,b] \times [c,d] = \{(x,y) \mid a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$$

og lad $f(x,y)$ være en kontinuert funktion defineret på $R$. Da er

$$\iint_R f(x,y)\,dA = \int_a^b \left( \int_c^d f(x,y)\,dy \right) dx = \int_c^d \left( \int_a^b f(x,y)\,dx \right) dy.$$

**Eks.**

$R = [0,1] \times [0,\pi]$.

$$\iint_R e^x \sin(y)\,dA = \int_0^1 \int_0^\pi e^x \sin(y)\,dy\,dx = \int_0^1 [-e^x \cos(y)]_{y=0}^{y=\pi}\,dx$$

$$= \int_0^1 \left(-e^x \cos(\pi) - (-e^x \cos(0))\right) dx = \int_0^1 2e^x\,dx$$

$$= [2e^x]_0^1 = 2e^1 - 2e^0 = \underline{\underline{2e-2}}$$