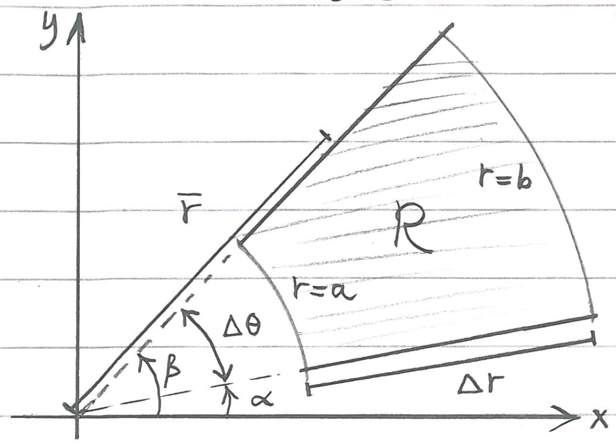
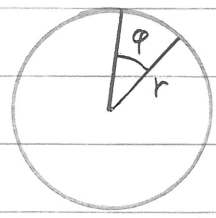
14. kursusgang: Planintegralet i polære koordinater

Integration over polære rektangler

Lad $0 \leq a < b$ og $0 < \beta - \alpha \leq 2\pi$. Betragt det polære rektangel R givet ved punkterne (r, θ), hvor

$$a \leq r \leq b \quad , \quad \alpha \leq \theta \leq \beta.$$





Areal af cirkeludsnit:

$$\pi r^2 \frac{\varphi}{2\pi} = \frac{1}{2} r^2 \varphi$$

Arealet af R er

$$\begin{aligned} A &= \tfrac{1}{2} b^2 (\beta - \alpha) - \tfrac{1}{2} a^2 (\beta - \alpha) \\ &= \tfrac{1}{2}(b^2 - a^2)(\beta - \alpha) = \tfrac{1}{2}(b+a)(b-a)(\beta-\alpha) \\ &= \bar{r}\, \Delta r\, \Delta\theta , \end{aligned}$$

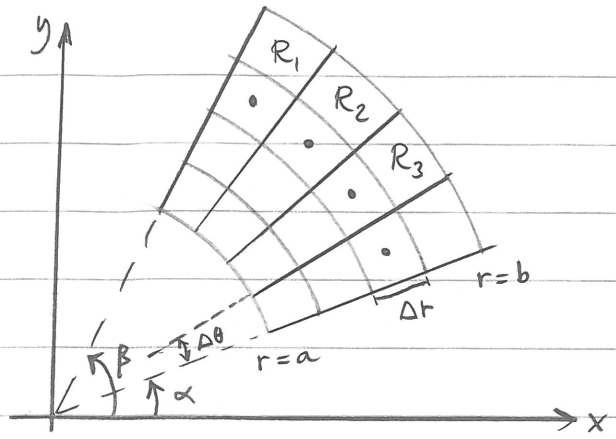
hvor $\bar{r} = \frac{a+b}{2}$, $\Delta r = b - a$ og $\Delta\theta = \beta - \alpha$.

Vi ønsker at begregne dobbeltintegraler af formen

$$\iint_R f(x,y)\, dA.$$

Riemann-summer for polære inddelinger:

- $\mathcal{P} = \{R_1, R_2, \ldots, R_k\}$ inddeling af R i $k = mn$ polære delrektangler givet ved
  - inddeling af $[a,b]$ i m delintervaller af længde $\Delta r = \frac{b-a}{m}$:
    $$a = r_0 < r_1 < r_2 < \ldots < r_m = b$$
  - inddeling af $[\alpha, \beta]$ i n delintervaller af længde $\Delta\theta = \frac{\beta - \alpha}{n}$:
    $$\alpha = \theta_0 < \theta_1 < \theta_2 < \ldots < \theta_n = \beta.$$
- Finhed af $\mathcal{P}$: $\quad |\mathcal{P}| = \max_{1 \leq i \leq k} |\mathrm{diag}(R_i)|$.
- $(r_i^*, \theta_i^*) \in R_i$ centrum i R_i dvs. r_i^* er gennemsnits radius og θ_i^* gennemsnits vinklen.



Rektangulære koordinater for centrum i R_i:

$(x_i^*, y_i^*) = (r_i^* \cos\theta_i^*,\ r_i^* \sin\theta_i^*)$.

- Arealet af R_i er

$\Delta A_i = r_i^* \Delta r \Delta\theta$

- Riemann-sum

$$\sum_{i=1}^{k} f(x_i^*, y_i^*)\Delta A_i = \sum_{i=1}^{k} f(r_i^*\cos\theta_i^*,\ r_i^*\sin\theta_i^*)\, r_i^* \Delta r \Delta\theta$$

$$= \sum_{i=1}^{k} g(r_i^*, \theta_i^*)\Delta r \Delta\theta,$$

hvor g er defineret som $g(r,\theta) = f(r\cos\theta, r\sin\theta)\cdot r$.
Sidste sum er en almindelig Riemann-sum for g, så

$$\iint_R f(x,y)\,dA = \lim_{|P|\to 0} \sum_{i=1}^{k} f(x_i^*, y_i^*)\Delta A_i$$

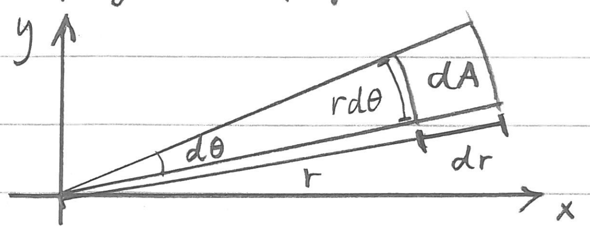
$$= \lim_{|P|\to 0} \sum_{i=1}^{k} g(r_i^*, \theta_i^*)\Delta r \Delta\theta$$

$$= \int_\alpha^\beta \int_a^b g(r,\theta)\,dr\,d\theta.$$

Vi har vist

$$\boxed{\iint_R f(x,y)\,dA = \int_\alpha^\beta \int_a^b f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, r\,dr\,d\theta}$$

Bemærk det ekstra r på højre side. Man kan huske det ved følgende figur:



$dA \approx r\,dr\,d\theta$

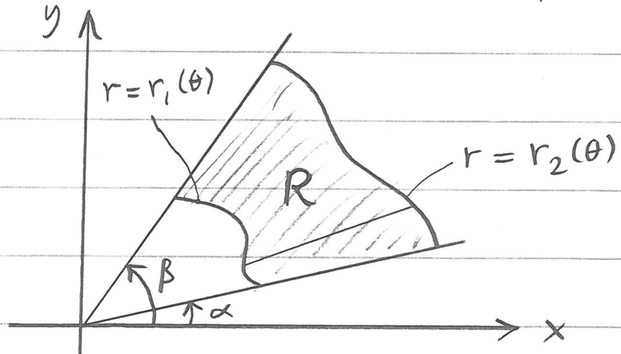
! <u>Integration over radialt simple områder</u>

Et område R i xy-planen kaldes <u>radialt simpel</u>, hvis det i polære koordinater kan skrives som

$$\{(r,\theta) \mid \alpha \le \theta \le \beta \;,\; r_1(\theta) \le r \le r_2(\theta)\},$$

hvor

- $0 < \beta - \alpha \le 2\pi$
- $r_1(\theta)$ og $r_2(\theta)$ er kontinuerte funktioner på $[\alpha,\beta]$ med $0 \le r_1(\theta) \le r_2(\theta)$ for alle θ.



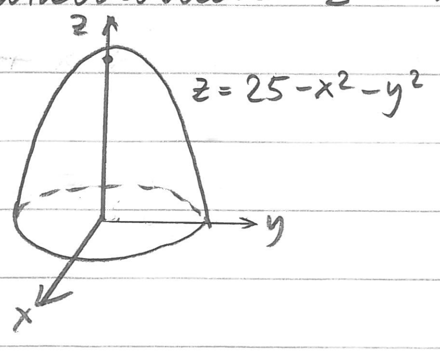
For et sådant område er

$$\iint_R f(x,y)\,dA = \int_\alpha^\beta \int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, r\,dr\,d\theta .$$

<u>Bemærk</u>: Sættes $f(x,y)=1$ fås en formel for arealet $a(R)$ af R:

$$a(R) = \int_\alpha^\beta \int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} r\,dr\,d\theta$$

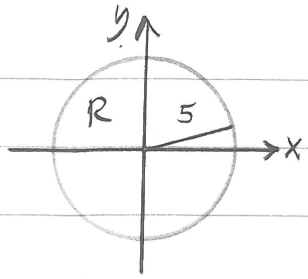
<u>Eks.</u> Beregn volumen over xy-planen og under paraboloiden $z = 25 - x^2 - y^2$.



Skæring med xy-planen:

$0 = 25 - x^2 - y^2 \iff x^2 + y^2 = 5^2$

Cirkel med centrum $(0,0)$ og radius 5.



Radialt simpel

$\{(r,\theta) \mid 0 \le \theta \le 2\pi \,,\ 0 \le r \le 5\}$

(Polært rektangel)

$$V = \iint_R (25 - x^2 - y^2)\, dA$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^5 (25 - (r\cos\theta)^2 - (r\sin\theta)^2)\, r\, dr\, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^5 (25 - r^2) r\, dr\, d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^5 (25r - r^3)\, dr\, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[\frac{25}{2} r^2 - \frac{1}{4} r^4\right]_0^5 d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{625}{4}\, d\theta = 2\pi \frac{625}{4}$$

$$= \underline{\underline{\frac{625\pi}{2}}}$$

Bemærk: Via integration i polære koordinater, er det muligt at beregne det vigtige integral

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2}\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

(E&P eks. 5)