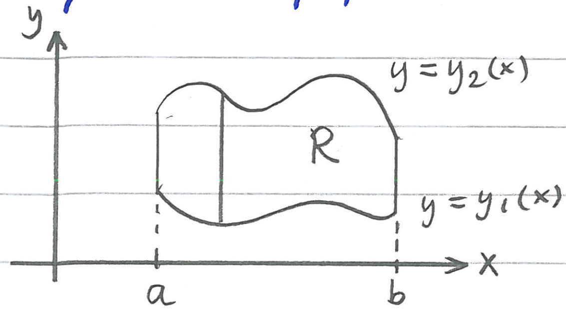
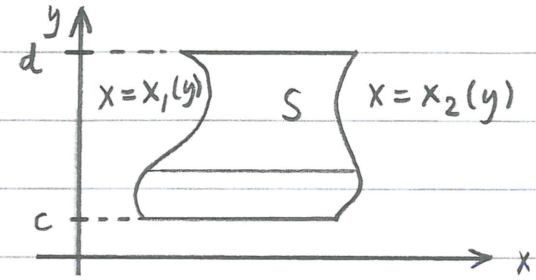
14. kursusgang: Repetition
Integration af funktioner af to variable II



Vertikalt simpel

$$\iint_R f(x,y)\,dA = \int_a^b \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\,dy\,dx$$



Horisontalt simpel

$$\iint_S f(x,y)\,dA = \int_c^d \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)\,dx\,dy$$

Volumen

- $R \subseteq \mathbb{R}^2$ begrænset område med rand.
- $f(x,y)$ kontinuert på R og $f(x,y) \geq 0$ for alle $(x,y) \in R$.

Volumen af $\{(x,y,z) \mid (x,y) \in R,\ 0 \leq z \leq f(x,y)\}$ er

$$V = \iint_R f(x,y)\,dA.$$

Areal: Arealet af R er

$$a(R) = \iint_R 1\,dA.$$

Volumen mellem to grafer

$z_1(x,y)$ og $z_2(x,y)$ kontinuerte funktioner på R med $z_1(x,y) \leq z_2(x,y)$ for alle $(x,y) \in R$.
Da er volumen af

$$\{(x,y,z) \mid (x,y) \in R \ , \ z_1(x,y) \leq z \leq z_2(x,y)\}$$

givet ved

$$V = \iint_R (z_2(x,y) - z_1(x,y)) \, dA.$$

Opgaverne

§ 13.2 opg. 3:

$$\int_0^1 \int_y^1 (x+y)\,dx\,dy = \int_0^1 \left[\tfrac{1}{2}x^2 + xy\right]_{x=y}^{x=1} dy$$

$$= \int_0^1 \left(\tfrac{1}{2}\cdot 1^2 + 1\cdot y - \left(\tfrac{1}{2}y^2 + y\cdot y\right)\right) dy$$

$$= \int_0^1 \left(\tfrac{1}{2} + y - \tfrac{3}{2}y^2\right) dy = \ldots$$

§ 13.2 opg. 19:
Partiel integration:

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = \left[f(x)g(x)\right]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx$$

(Følger ved integration af $(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$)