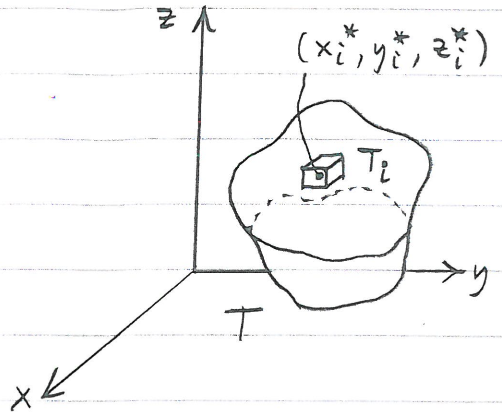
16. kursusgang: Rumintegraler

Rumintegralet defineres analogt med planintegralet:



- T begrænset delmængde af rummet med rand.
- $f(x,y,z)$ kontinuert funktion defineret på T.

Der vælges en rektangulær kasse, som indeholder T. Kassen inddeles i mindre kasser T_i med samme kantlængder $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ og volumen $\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z$.
Indre inddeling af T:
$\mathcal{P} = \{T_1, T_2, \ldots, T_n\}$.
$(x_i^*, y_i^*, z_i^*) \in T_i$
Riemann sum: $\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*, y_i^*, z_i^*) \Delta V$.

Def. $$\iiint_T f(x,y,z)\,dV = \lim_{|\mathcal{P}|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*, y_i^*, z_i^*)\Delta V.$$

Bemærk: Volumen (eller rumfanget) V af T er

$$V = \iiint_T 1\,dV$$

Bemærk: Rumintegraler kaldes også tripelintegraler.

Anvendelser af rumintegraler

Lad T være et stift legeme med massetæthed $\delta(x,y,z)$.

$$m = \iiint_T \delta(x,y,z)\,dV \qquad \text{massen af } T.$$

$$V = \iiint_T 1\,dV \qquad \text{volumen af } T.$$

Massemidtpunktet $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ af T er bestemt ved

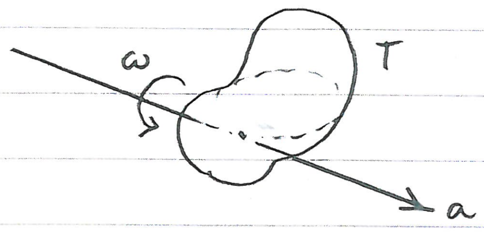
$$\bar{x} = \frac{1}{m}\iiint_T x\,\delta(x,y,z)\,dV, \qquad \bar{y} = \frac{1}{m}\iiint_T y\,\delta(x,y,z)\,dV,$$

$$\bar{z} = \frac{1}{m}\iiint_T z\,\delta(x,y,z)\,dV.$$

Hvis T roterer om en akse a med konstant vinkelhastighed ω (i rad/s), så er rotationsenergien

$$E_{rot} = \frac{1}{2} I_a \omega^2 ,$$

hvor I_a er en konstant kaldet inertimomentet.



Inertimomenterne om x, y og z-akserne er

$$I_x = \iiint_T (y^2+z^2)\,\delta(x,y,z)\,dV ,$$

$$I_y = \iiint_T (x^2+z^2)\,\delta(x,y,z)\,dV ,$$

$$I_z = \iiint_T (x^2+y^2)\,\delta(x,y,z)\,dV .$$

Beregning af rumintegraler

Sætning: Lad T være en rektangulær kasse

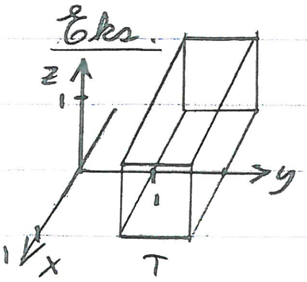
$T = [a,b]\times[c,d]\times[e,f] = \{(x,y,z) \mid x\in[a,b], y\in[c,d], z\in[e,f]\}$,

og lad $f(x,y,z)$ være en kontinuert funktion defineret på T. Da gælder

$$\iiint_T f(x,y,z)\,dV = \int_a^b \int_c^d \int_e^f f(x,y,z)\,dz\,dy\,dx$$

Integreres der i en anden rækkefølge, fås samme resultat.

Eks.



$T = [-1,1]\times[1,2]\times[0,1]$

$f(x,y,z) = x^2yz$

$$\iiint_T f(x,y,z)\,dV = \int_{-1}^{1}\int_1^2\int_0^1 x^2yz\,dz\,dy\,dx$$

$$= \int_{-1}^{1}\int_{1}^{2} \left[\tfrac{1}{2} x^2 y z^2 \right]_{z=0}^{z=1} dy\,dx = \int_{-1}^{1}\int_{1}^{2} \tfrac{1}{2} x^2 y \, dy\, dx$$

$$= \int_{-1}^{1} \left[\tfrac{1}{4} x^2 y^2\right]_{y=1}^{y=2} dx = \int_{-1}^{1} (x^2 - \tfrac{1}{4} x^2)\, dx = \int_{-1}^{1} \tfrac{3}{4} x^2 dx$$

$$= \left[\tfrac{1}{4} x^3 \right]_{-1}^{1} = \tfrac{1}{4} - (-\tfrac{1}{4}) = \underline{\underline{\tfrac{1}{2}}}$$

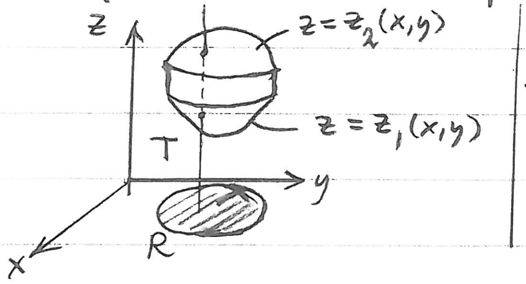
Hurtigere: Vi kan udnytte, at denne funktion er på formen $f(x,y,z) = \alpha(x)\cdot\beta(y)\cdot\gamma(z)$ som følger:

$$\int_{-1}^{1}\int_{1}^{2}\int_{0}^{1} x^2 y z \, dz\,dy\,dx = \int_{-1}^{1} x^2 \int_{1}^{2} y \int_{0}^{1} z \, dz\,dy\,dx =$$

$$\left(\int_{-1}^{1} x^2 dx\right)\cdot\left(\int_{1}^{2} y\, dy\right)\cdot\left(\int_{0}^{1} z\, dz\right) = \left[\tfrac{1}{3}x^3\right]_{-1}^{1}\cdot\left[\tfrac{1}{2}y^2\right]_{1}^{2}\cdot\left[\tfrac{1}{2}z^2\right]_{0}^{1} =$$

$$\tfrac{1}{3}(1-(-1))\cdot\tfrac{1}{2}(4-1)\cdot\tfrac{1}{2}(1-0) = \tfrac{2}{3}\cdot\tfrac{3}{2}\cdot\tfrac{1}{2} = \underline{\tfrac{1}{2}}$$

Integration over simple områder

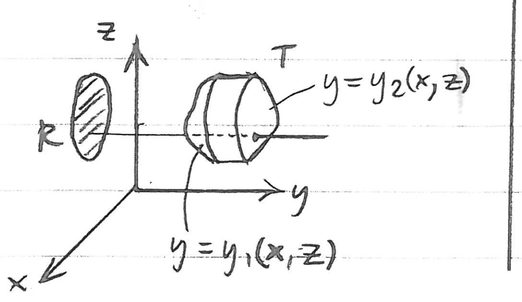


z-simpelt område:

$T = \{(x,y,z) \mid z_1(x,y) \le z \le z_2(x,y),\ (x,y)\in R\}$

$f(x,y,z)$ defineret på T.

$$\iiint_T f(x,y,z)\,dV = \iint_R \left(\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz \right) dA$$

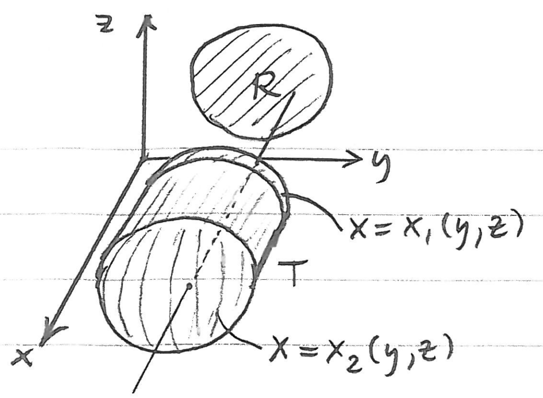


y-simpelt område:

$T = \{(x,y,z) \mid y_1(x,z) \le y \le y_2(x,z),\ (x,z)\in R\}$

$f(x,y,z)$ defineret på T.

$$\iiint_T f(x,y,z)\,dV = \iint_R \left(\int_{y_1(x,z)}^{y_2(x,z)} f(x,y,z)\,dy \right) dA$$



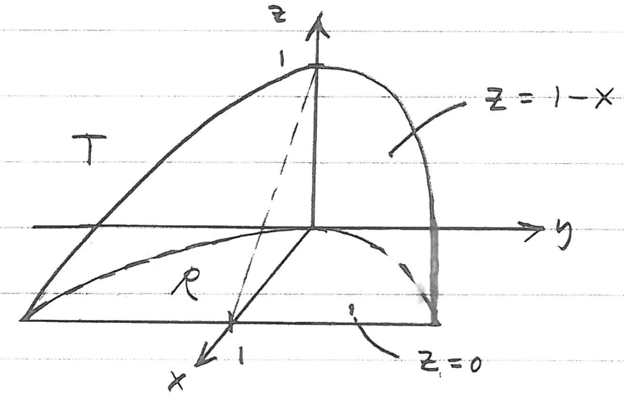
x - simpelt område :

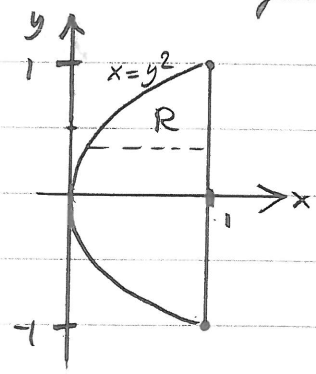
$T = \{(x,y,z) \mid x_1(y,z) \leq x \leq x_2(y,z),\ (y,z) \in R\}$

$f(x,y,z)$ defineret på T.

$$\iiint_T f(x,y,z)\,dV = \iint_R \left(\int_{x_1(y,z)}^{x_2(y,z)} f(x,y,z)\,dx \right) dA$$

Eks. Beregn rumfanget af området T, der er afgrænset af paraboloid-cylinderen $x = y^2$ samt planerne $z = 0$ og $x + z = 1$.





T er z - simpelt (og x - simpelt samt y - simpelt)

$$V = \iiint_T 1\,dV = \iint_R \left(\int_0^{1-x} 1\,dz \right) dA$$

$$= \iint_R [z]_{z=0}^{z=1-x}\,dA = \iint_R (1-x)\,dA$$

$$= \int_{-1}^{1} \int_{y^2}^{1} (1-x)\,dx\,dy = \int_{-1}^{1} \left[x - \tfrac{1}{2}x^2\right]_{x=y^2}^{x=1} dy$$

$$= \int_{-1}^{1} \left(\tfrac{1}{2} - y^2 + \tfrac{1}{2}y^4\right) dy = \left[\tfrac{1}{2}y - \tfrac{1}{3}y^3 + \tfrac{1}{10}y^5\right]_{-1}^{1}$$

$$= 2\left(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{10}\right) = 1 - \tfrac{2}{3} + \tfrac{1}{5} = \frac{15 - 10 + 3}{15} = \underline{\underline{\frac{8}{15}}}$$