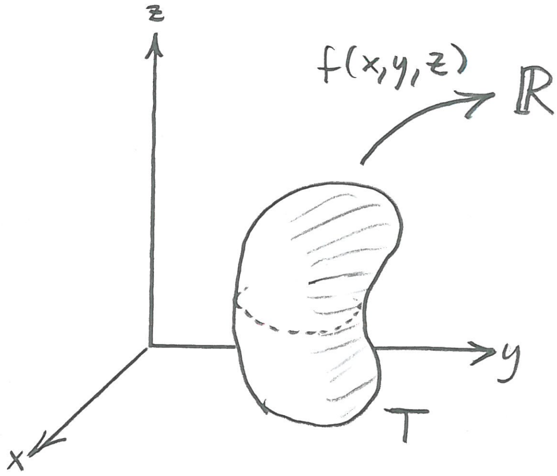
17. kursusgang : Repetition

Rumintegraler



- T begrænset område af rummet
- $f(x,y,z)$ kontinuert funktion defineret på T

Rumintegralet eller tripel-integralet af $f(x,y,z)$ over T:

$$\iiint_T f(x,y,z)\,dV.$$

For en rektangulær kasse

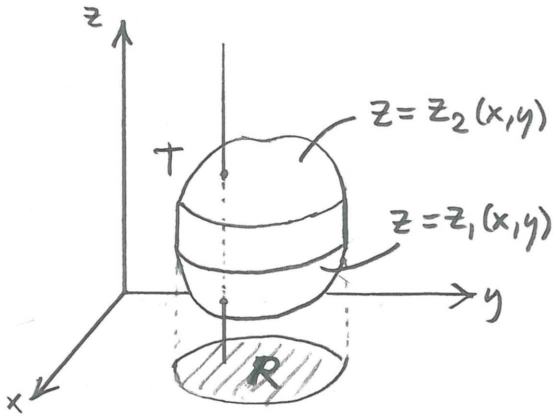
$$T = \{(x,y,z) \mid a \le x \le b,\ c \le y \le d,\ k \le z \le l\}$$

er

$$\iiint_T f(x,y,z)\,dV = \int_a^b \int_c^d \int_k^l f(x,y,z)\,dz\,dy\,dx.$$

$$= \int_c^d \int_a^b \int_k^l f(x,y,z)\,dz\,dx\,dy \quad \text{etc.}$$

T kaldes <u>z-simpel</u> såfremt der findes et område R i xy-planen og to kontinuerte funktioner $z_1(x,y)$ og $z_2(x,y)$ definerede på R således at



$$T = \{(x,y,z) \mid z_1(x,y) \le z \le z_2(x,y),\ (x,y) \in R\}.$$

Der gælder

$$\iiint_T f(x,y,z)\,dV = \iint_R \left(\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz \right) dA.$$

Analogt : y-simpel og x-simpel.

Anvendelser

$$V = \iiint_T 1 \, dV$$ volumen (eller rumfanget) af T.

Antag vi har et stift legeme K, der netop dækker området T, og at K har massetæthed $\delta(x,y,z)$ (i g/cm^3 f. eks.).

$$m = \iiint_T \delta(x,y,z) \, dV$$ massen af K

$$\bar{x} = \frac{1}{m} \iiint_T x \, \delta(x,y,z) \, dV$$

$$\bar{y} = \frac{1}{m} \iiint_T y \, \delta(x,y,z) \, dV$$

$$\bar{z} = \frac{1}{m} \iiint_T z \, \delta(x,y,z) \, dV$$

massemidtpunktet af K er $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$.

$$I_x = \iiint_T (y^2 + x^2) \, \delta(x,y,z) \, dV$$

$$I_y = \iiint_T (x^2 + z^2) \, \delta(x,y,z) \, dV$$

$$I_z = \iiint_T (x^2 + y^2) \, \delta(x,y,z) \, dV$$

Inertimomenter om x-, y- og z-aksen