18. kursusgang: Introduktion til komplekse tal

Motivation: Ligningen

$$x^2 = -1$$

har ingen reelle løsninger. Idé: Udvid de reelle tal $\mathbb{R}$ med et nyt symbol i (et nyt tal $i \notin \mathbb{R}$) med egenskaben $i^2 = -1$. Vi har så tal af formen

$$a + bi \quad , \text{ hvor } a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}.$$

Regneoperationer:

- $(a+bi)+(c+di) = a+bi+c+di = (a+c)+(b+d)i$
- $(a+bi)-(c+di) = a+bi-c-di = (a-c)+(b-d)i$
- $(a+bi)\cdot(c+di) = ac+adi+bci+bd(-1)$
  $= (ac-bd)+(ad+bc)i$
- $\dfrac{a+bi}{c+di} = \dfrac{(a+bi)\cdot(c-di)}{(c+di)\cdot(c-di)} = \dfrac{ac+bd}{c^2+d^2} + \dfrac{bc-ad}{c^2+d^2}i,$

  $(c,d) \neq (0,0).$

Def. Et komplekst tal er et udtryk af formen

$$a + bi,$$

hvor $a \in \mathbb{R}$ og $b \in \mathbb{R}$. Vi sætter

$$a + bi = c + di$$

såfremt $a = c$ og $b = d$.

Def. For komplekse tal defineres $+, -, \cdot, /$ som følger:

- $(a+bi) \pm (c+di) = (a \pm c) + (b \pm d)i$
- $(a+bi)\cdot(c+di) = (ac-bd)+(ad+bc)i$
- $\dfrac{a+bi}{c+di} = \dfrac{ac+bd}{c^2+d^2} + \dfrac{bc-ad}{c^2+d^2}i, \quad (c,d) \neq (0,0).$

Mængden af komplekse tal udstyret med disse regneoperationer betegnes $\mathbb{C}$.

<u>Bemærk</u>: Man kan vise, at de sædvanlige regne-regler for $+, -, \cdot, /$ på $\mathbb{R}$ også gælder for $+, -, \cdot, /$ på $\mathbb{C}$. F. eks. er

$$u \cdot (v + w) = u \cdot v + u \cdot w \quad \text{for alle } u, v, w \in \mathbb{C}.$$

! <u>Bemærk</u>: Regn som hidtil, og husk at $i^2 = -1$.

<u>Bemærk</u>: Det er <u>ikke</u> muligt at definere en ordning på $\mathbb{C}$ med de sædvanlige egenskaber. Dvs.
$\geq, \leq, >, <$ giver ikke mening for komplekse tal.

<u>Eks.</u> $(5+2i)\cdot(3-i) = 5\cdot 3 + 5\cdot(-i) + 2i\cdot 3 + 2i\cdot(-i)$
$= 15 - 5i + 6i - 2i^2 = 15 + i - 2\cdot(-1) = 17 + i$

<u>Eks.</u> $(1+i)^2 = 1^2 + i^2 + 2i = 1 + (-1) + 2i = 2i$

<u>Def.</u> Lad z være et komplekst tal skrevet på <u>standard form</u> dvs.

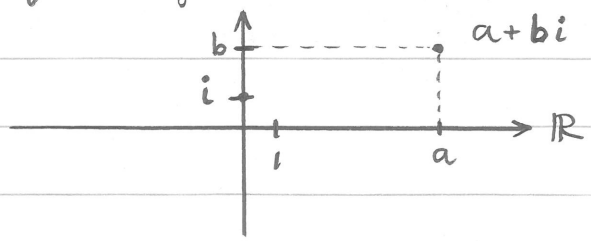
$$z = a + bi, \quad \text{hvor } a \in \mathbb{R},\ b \in \mathbb{R}.$$

<u>Realdelen</u> og <u>imaginærdelen</u> af z defineres som

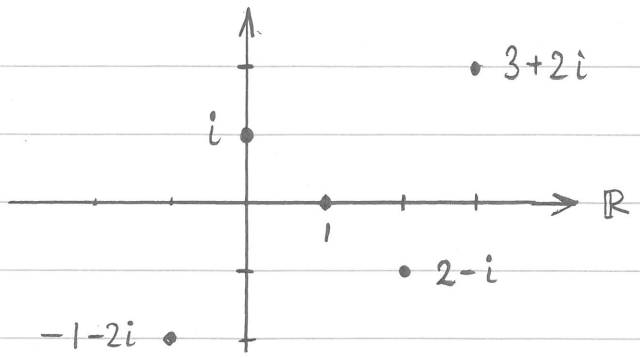
$$\mathrm{Re}(z) = a \quad \text{og} \quad \mathrm{Im}(z) = b.$$

<u>Eks.</u> $\mathrm{Re}(7+3i) = 7$ og $\mathrm{Im}(7+3i) = 3$
<u>Eks.</u> $\mathrm{Re}((5+2i)\cdot(3-i)) = 17$ og $\mathrm{Im}((5+2i)\cdot(3-i)) = 1$.

<u>Def.</u> <u>Den komplekse plan</u>



Eks.



Def. Lad $z = a + bi$, hvor $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$.
Modulus eller absolutværdien af z defineres som

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

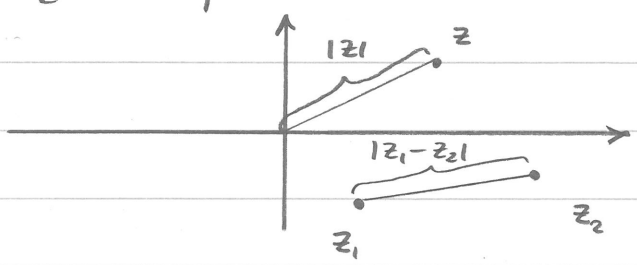
Den kompleks konjugerede af z defineres som

$$\bar{z} = a - bi.$$

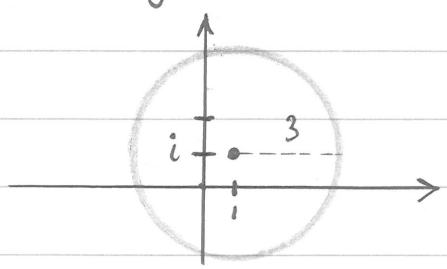
Eks. $|3 + 4i| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$, $\quad \overline{3 + 4i} = 3 - 4i$

Bemærk:

- $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$
- For $z_1 = a_1 + b_1 i$ og $z_2 = a_2 + b_2 i$ med $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$ er
  $|z_1 - z_2| = \sqrt{(a_1 - a_2)^2 + (b_1 - b_2)^2}$.
  Dvs $|z_1 - z_2|$ er afstanden mellem z_1 og z_2



Eks. $|z - (1 + i)| = 3$ er ligningen for en cirkel med centrum i $1 + i$ og radius 3.



Sætning: For alle $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ gælder

(1) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$

(2) $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$

(3) $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$, $z_2 \neq 0$

(4) $\mathrm{Re}(z) = \frac{z + \overline{z}}{2}$, $\mathrm{Im}(z) = \frac{z - \overline{z}}{2i}$

(5) $\overline{\overline{z}} = z$

(6) $|\overline{z}| = |z|$

(7) $z \cdot \overline{z} = |z|^2$

(8) $\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \overline{z_2}}{z_2 \cdot \overline{z_2}} = \frac{z_1 \overline{z_2}}{|z_2|^2}$

Bevis: Direkte udregning f.eks. (7):

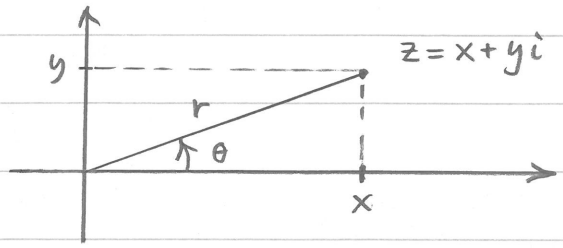
$z \cdot \overline{z} = (a+bi)\cdot(a-ib) = a^2 - (ib)^2 = a^2 - i^2 b^2 = a^2 + b^2 = |z|^2$

q.e.d.

Eks. $\frac{5-i}{-3+i} = \frac{(5-i)\cdot(-3-i)}{(-3+i)\cdot(-3-i)} = \frac{-15-5i+3i-1}{(-3)^2+1^2} = \frac{-16-2i}{10} = -\frac{8}{5} - \frac{1}{5}i.$

Polær form

Lad $z = x + yi$, hvor $x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}$.



$x = r\cos\theta$
$y = r\sin\theta$

Polære koordinater (r, θ) for z vælges altid så $r = |z| = \sqrt{x^2+y^2}$.
For $z \neq 0$ vælges et θ så $\cos\theta = \frac{x}{|z|}$, $\sin\theta = \frac{y}{|z|}$.
Et sådant kaldes en <u>argumentværdi</u> for z, og vi skriver $\arg(z) = \theta + 2p\pi$, $p \in \mathbb{Z}$.

<u>Hovedargumentet</u> $\mathrm{Arg}(z)$ for z er den argumentværdi der ligger i intervallet $]-\pi, \pi]$.

Det komplekse tal $z = x + yi$ skrevet på <u>polar form</u>:

$$z = r(\cos(\theta) + i\sin(\theta)) = r\,\mathrm{cis}(\theta),$$

hvor $\mathrm{cis}(\theta) = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$.

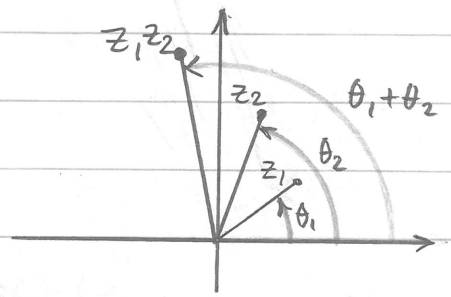
<u>Sætning</u>: For $z_1 = r_1\,\mathrm{cis}(\theta_1)$ og $z_2 = r_2\,\mathrm{cis}(\theta_2)$ er

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2\,\mathrm{cis}(\theta_1 + \theta_2)$$

dvs.

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1|\,|z_2|,$$

$$\arg(z_1 \cdot z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2).$$



<u>Bevis</u>: $z_1 z_2 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1) \cdot r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) =$
$r_1 r_2(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2 + i(\sin\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\sin\theta_2)) =$
$r_1 r_2(\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2))$ q.e.d.

<u>Sætning</u>: For $z_1 = r_1\,\mathrm{cis}(\theta_1)$ og $z_2 = r_2\,\mathrm{cis}(\theta_2) \neq 0$ er

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\,\mathrm{cis}(\theta_1 - \theta_2)$$

dvs.

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|},$$

$$\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg(z_1) - \arg(z_2).$$