21. kursusgang: Komplekse polynomier

Def. Et *komplekst polynomium* af *grad* n er en funktion på formen
$$p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0 \quad , \; z \in \mathbb{C},$$
hvor $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$ og $a_n \neq 0$.

Et komplekst tal $z_0 \in \mathbb{C}$ siges at være en *rod* i $p(z)$ såfremt $p(z_0) = 0$.

Eks.

polynomium $p(z)$	grad(p)
$(5+i)z^2 + (3-2i)z + 7$	2
$z^3 + 2iz - 3 + i$	3
$5-i$	0
$z+2$	1

Def. $p(z) = 0$ kaldes *nulpolynomiet* og tildeles graden 0.

Bemærk: Man regner med komplekse polynomier, som man regner med reelle polynomier $(+,-,\cdot)$.
Polynomiers division udføres også som sædvanlig.
Hvis $p_1(z)$ og $p_2(z)$ er polynomier med $\text{grad}(p_1) \geq \text{grad}(p_2) > 0$, fås ved division med rest at
$$p_1(z) = q(z) p_2(z) + r(z),$$
hvor $\text{grad}(p_2) > \text{grad}(r) \geq 0$.

Sætning: Lad $p(z)$ være et polynomium af grad $n \geq 1$. Da gælder

z_0 er en rod i $p(z)$

$\Updownarrow$

Der findes et polynomium $q(z)$ så $p(z) = q(z)(z-z_0)$.

Bevis:

Ved polynomiers division af $p(z)$ med $z - z_0$ fås

$$p(z) = q(z)(z-z_0) + k,$$

hvor $k \in \mathbb{C}$ er en konstant. Så $p(z_0) = k$ hvormed $p(z_0) = 0 \Leftrightarrow k = 0$. q.e.d.

Eks. $p(z) = z^5 + z^4 + 5z^3 + 5z^2 + 4z + 4$.

Ved indsættelse ses at $z = -1$ er en rod.

$$
\begin{array}{l|l|l}
z+1 & z^5 + z^4 + 5z^3 + 5z^2 + 4z + 4 & z^4 + 5z^2 + 4 \\
 & \underline{z^5 + z^4} & \\
 & \qquad 5z^3 + 5z^2 + 4z + 4 & \\
 & \qquad \underline{5z^3 + 5z^2} & \\
 & \qquad\qquad 4z + 4 & \\
 & \qquad\qquad \underline{4z + 4} & \\
 & \qquad\qquad\quad 0 &
\end{array}
$$

Dvs. $p(z) = (z^4 + 5z^2 + 4)(z+1)$.

Sætning (Algebraens fundamentalsætning)
Ethvert komplekst polynomium $p(z)$ af grad $n \geq 1$ har mindst en rod $z_0 \in \mathbb{C}$.

(Bevis: udeladt)

Ved gentagende brug af algebraens fundamentalsætning og ovenstående sætning fås:

Corollar: Lad $p(z)$ være et polynomium af grad $n \geq 1$. Da findes komplekse tal $z_1, z_2, \ldots, z_n$ så

$$p(z) = a_0(z-z_1)(z-z_2)\ldots(z-z_n).$$

Samler vi de rødder der optræder flere gange fås

Corollar: Lad $p(z)$ være et polynomium af grad $n \geq 1$. Da findes komplekse tal

$$\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_k \quad \text{med } \zeta_i \neq \zeta_j \text{ for } i \neq j$$

og hele tal

$$m_1, m_2, \ldots, m_k$$

med $1 \le m_j \le n$ for $j = 1, 2, \dots, k$ og $m_1 + m_2 + \dots + m_k = n$,

således at

$$p(z) = a_n (z - \zeta_1)^{m_1} (z - \zeta_2)^{m_2} \dots (z - \zeta_k)^{m_k}.$$

Def. m_j kaldes multiplicitet_en af roden ζ_j.

Corollar: Et komplekst polynomium af grad $n \ge 1$ har præcis n komplekse rødder (regnet med multiplicitet).

Eks. $p(z) = 5i (z-2)^3 (z - (3+2i))^2$.

2 er en rod af mult. 3, og $3+2i$ er en rod af mult. 2.

Bemærkning: Der findes ingen generelle løsningsformler for rødderne i polynomier af grad 5 eller højere.

Sætning:*) Lad $p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$ være et polynomium med reelle koefficienter $a_j \in \mathbb{R}$ for $j = 0, 1, 2, \dots, n$. Hvis z_0 er en rod i $p(z)$, så er den kompleks konjugerede $\bar{z}_0$ også en rod i $p(z)$.

Bevis: Hvis $P(z_0) = 0$, så er

$$\begin{aligned} 0 = \bar{0} = \overline{P(z_0)} &= \bar{a}_n \bar{z}_0^n + \bar{a}_{n-1} \bar{z}_0^{n-1} + \dots + \bar{a}_1 \bar{z}_0 + \bar{a}_0 \\ &= a_n \bar{z}_0^n + a_{n-1} \bar{z}_0^{n-1} + \dots + a_1 \bar{z}_0 + a_0 = P(\bar{z}_0) \end{aligned}$$

q.e.d.

Bemærk: For $z_0 = \alpha + i\beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ er

$$(z - z_0)(z - \bar{z}_0) = (z - \alpha - i\beta)(z - \alpha + i\beta) = z^2 - 2\alpha z + \alpha^2 + \beta^2.$$

Et polynomium af grad $n \ge 1$, med reelle koefficienter, kan dermed faktoriseres i reelle 1. og 2. grads polynomier. Hvis n er ulige, er der mindst én reel rod.

*) Husk: $\overline{a + ib} = a - ib$, for $a, b \in \mathbb{R}$

Andengradsligningen

Def. For $\beta \in \mathbb{R}$ definerer vi $\quad \operatorname{sgn}(\beta) = \begin{cases} 1, & \beta \geq 0 \\ -1, & \beta < 0. \end{cases}$

Sætning: Betragt ligningen

$$z^2 = \alpha + i\beta,$$

hvor $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Sæt $r = \sqrt{\alpha^2+\beta^2}$. Da er de to løsninger til ligningen givet ved

$$z = \pm\left(\sqrt{\frac{r+\alpha}{2}} + i \cdot \operatorname{sgn}(\beta)\sqrt{\frac{r-\alpha}{2}}\right).$$

Bevis: Vi gør prøve

$$\left(\pm\left(\sqrt{\frac{r+\alpha}{2}} + i\cdot\operatorname{sgn}(\beta)\sqrt{\frac{r-\alpha}{2}}\right)\right)^2 =$$

$$\frac{r+\alpha}{2} - \frac{r-\alpha}{2} + 2i\cdot\operatorname{sgn}(\beta)\sqrt{\frac{r+\alpha}{2}}\cdot\sqrt{\frac{r-\alpha}{2}} =$$

$$\alpha + 2i\cdot\operatorname{sgn}(\beta)\sqrt{\frac{(r+\alpha)(r-\alpha)}{4}} = \alpha + i\cdot\operatorname{sgn}(\beta)\sqrt{r^2-\alpha^2} =$$

$$\alpha + i\cdot\operatorname{sgn}(\beta)\sqrt{\beta^2} = \alpha + i\cdot\operatorname{sgn}(\beta)|\beta| = \alpha + i\beta. \qquad \text{q.e.d.}$$

Sætning: Betragt den komplekse andengradsligning

$$az^2 + bz + c = 0,$$

hvor $a, b, c \in \mathbb{C}$ og $a \neq 0$. Diskriminanten for ligningen er

$$D = b^2 - 4ac$$

og løsningerne er

$$z = \frac{-b \pm w_0}{2a},$$

hvor w_0 er et komplekst tal med $w_0^2 = D$.

Bevis: Som for den reelle andengradsligning.

Eks: Løs ligningen $2z^2 - 10iz - 12 = 0$.

$D = (-10i)^2 - 4\cdot 2\cdot(-12) = -100 + 96 = -4 = (2i)^2$.

$$z = \frac{-(-10i) \pm 2i}{2\cdot 2} = \frac{10i \pm 2i}{4} = \underline{\underline{\begin{cases} 3i \\ 2i \end{cases}}}$$