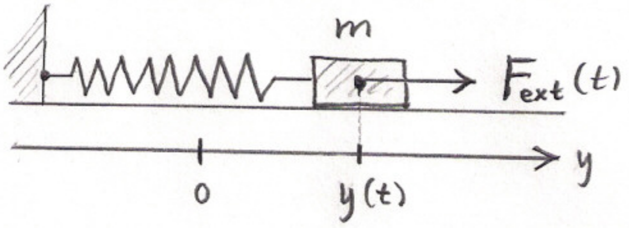
22. kursusgang: Anden ordens lineære differentialligninger

Motivation: Den harmoniske oscillator.



Længden af den upåvirkede fjeder definerer nulpunktet.

Fjederkraft ifølge Hooke's lov : $-ky$

Gnidningskraft : $-b\frac{dy}{dt} = -by'$

Ekstern kraft : $F_{ext}(t)$

Ved Newtons 2. lov fås $-ky - by' + F_{ext}(t) = my''$ dvs.

$$my'' + by' + ky = F_{ext}(t)$$

Hvordan løses denne type differentialligninger?

Def. En 2. ordens lineær differentialligning er en ligning på formen

$$ay'' + by' + cy = q(t) \quad , \quad t \in I \qquad (L)$$

hvor $a, b, c \in \mathbb{R}$ med $a \neq 0$, og $q(t)$ er en kontinuert funktion defineret på intervallet I.

Def. Ligningen (L) siges at være homogen såfremt $q(t) = 0$ for alle t og inhomogen ellers.

Denne forelæsning drejer sig om den homogene ligning (hvor $I = \mathbb{R}$):

$$ay'' + by' + cy = 0. \qquad (H)$$

Den tilhørende karakterligning er

$$aR^2 + bR + c = 0 \qquad (K)$$

med diskriminant

$$D = b^2 - 4ac.$$

Sætning:

(1) Hvis $D>0$ har (K) to forskellige reelle rødder $r_1 \neq r_2$. Den fuldstændige løsning til (H) er

$$y(t) = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t} \quad ; \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

(2) Hvis $D=0$ har (K) en reel dobbeltrod r, og den fuldstændige løsning til (H) er

$$y(t) = c_1 e^{rt} + c_2 t e^{rt} \quad ; \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

(3) Hvis $D<0$ har (K) to kompleks konjugerede rødder $\alpha + i\beta$ og $\alpha - i\beta$, hvor $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ og $\beta \neq 0$. Den fuldstændige løsning til (H) er

$$y(t) = c_1 e^{\alpha t}\cos(\beta t) + c_2 e^{\alpha t}\sin(\beta t) \quad ; \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Eks. $y'' - 6y' + 5y = 0.$

$R^2 - 6R + 5 = 0$, $D = (-6)^2 - 4\cdot 1\cdot 5 = 16 > 0$

$$R = \frac{-(-6) \pm \sqrt{16}}{2} = \begin{cases} 5 \\ 1 \end{cases}$$

Fuldst. løsning: $\underline{\underline{y(t) = c_1 e^{t} + c_2 e^{5t}}}$; $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Eks. $y'' - 4y' + 4 = 0.$

$R^2 - 4R + 4 = 0$, $D = (-4)^2 - 4\cdot 1\cdot 4 = 0$

$$R = \frac{-(-4) \pm \sqrt{0}}{2} = 2$$

Fuldst. løsning: $\underline{\underline{y(t) = c_1 e^{2t} + c_2 t e^{2t}}}$; $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Eks. $y'' - 2y' + 4y = 0.$

$R^2 - 2R + 4 = 0$, $D = (-2)^2 - 4\cdot 1\cdot 4 = -12 < 0$

$$R = \frac{-(-2) \pm \sqrt{12}\, i}{2} = 1 \pm \sqrt{\tfrac{12}{4}}\, i = 1 \pm \sqrt{3}\, i$$

Fuldst. løsning: $\underline{\underline{y(t) = c_1 e^{t}\cos(\sqrt{3}\,t) + c_2 e^{t}\sin(\sqrt{3}\,t)}}$; $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

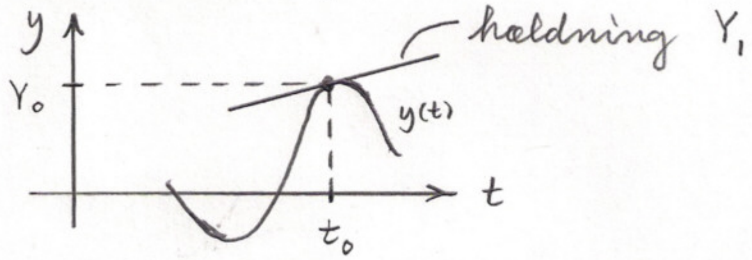
Om beviset for hovedsætningen.

Sætning 1: (Eksistens og entydighed)

Lad $a, b, c \in \mathbb{R}$ med $a \neq 0$ og lad $t_0, Y_0, Y_1 \in \mathbb{R}$. Der findes en entydig løsning $y(t)$, $t \in \mathbb{R}$ til begyndelses-værdi problemet

$$ay'' + by' + cy = 0 \quad ; \quad y(t_0) = Y_0 \quad , \quad y'(t_0) = Y_1 .$$

(Bevis udeladt).



Sætning 2: Hvis $y_1(t)$ og $y_2(t)$ er løsninger til (H), så er $y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t)$ også en løsning.

Bevis:

$$a(c_1y_1 + c_2y_2)'' + b(c_1y_1 + c_2y_2)' + c(c_1y_1 + c_2y_2) =$$

$$ac_1y_1'' + ac_2y_2'' + bc_1y_1' + bc_2y_2' + cc_1y_1 + cc_2y_2 =$$

$$c_1(ay_1'' + by_1' + cy_1) + c_2(ay_2'' + by_2' + cy_2) = c_1 \cdot 0 + c_2 \cdot 0 = 0 \quad \text{q.e.d.}$$

Sætning 3: Hvis $y_1(t)$ og $y_2(t)$ er løsninger til (H) og Wronski determinanten

$$W(y_1(t), y_2(t)) = \begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{vmatrix} \neq 0 \quad \text{for alle } t \in \mathbb{R},$$

så er

$$y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) \quad ; \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

den fuldstændige løsning til (H).

Bevis: Løsninger OK ved sætning 2. Har vi dem alle med? Lad $f(t)$ være en vilkårlig løsning til (H). Vælg et $t_0 \in \mathbb{R}$ og sæt $Y_0 = f(t_0)$ og $Y_1 = f'(t_0)$. Betragt ligningssystemet

$$\left.\begin{aligned} c_1 y_1(t_0) + c_2 y_2(t_0) &= Y_0 \\ c_1 y_1'(t_0) + c_2 y_2'(t_0) &= Y_1 \end{aligned}\right\}$$

Systemets determinant $W(y_1(t_0), y_2(t_0))$ er forskellig fra nul, så ved Cramers regel har systemet netop ēn løsning $(c_1, c_2) = (a_1, a_2)$. Sæt $y_0(t) = a_1 y_1(t) + a_2 y_2(t)$. Ved sætning 1 er $y_0(t) = f(t)$. q.e.d.

<u>Bevis</u> for hovedsætningen:

(1) Indsæt $y(t) = e^{Rt}$ i venstre-siden af (H):

$$a(e^{Rt})'' + b(e^{Rt})' + ce^{Rt} = (aR^2 + bR + c)e^{Rt}$$

Da r_1 og r_2 er rødder i (K), ser vi at $y_1(t) = e^{r_1 t}$ og $y_2(t) = e^{r_2 t}$ er løsninger til (H) OK.

$$W(e^{r_1 t}, e^{r_2 t}) = \begin{vmatrix} e^{r_1 t} & e^{r_2 t} \\ r_1 e^{r_1 t} & r_2 e^{r_2 t} \end{vmatrix} = (r_2 - r_1)e^{(r_1 + r_2)t} \neq 0$$

da $r_1 \neq r_2$. OK. Resultatet følger ved sætning 3.

(2) & (3) tilsvarende. q.e.d.