22. kursusgang : Repetition

Komplekse polynomier

Komplekst polynomium af grad n :

$$p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$$

Koefficienterne $a_0, a_1, \dots, a_n$ er komplekse tal og $a_n \neq 0$.
En rod i $p(z)$: Et $z_0 \in \mathbb{C}$ så $p(z_0) = 0$.

Algebraens fundamentalsætning:
Et komplekst polynomium af grad $n \geq 1$ har præcis n komplekse rødder (regnet med multiplicitet).

Polynomiers division: Et eksempel

$$\begin{array}{r|l|l} z^2 - 2 & z^3 - iz^2 + 3z - 2i & z - i \quad \leftarrow \text{kvotient.} \\ & z^3 - 2z & \\ \hline & -iz^2 + 5z - 2i & \\ & -iz^2 + 2i & \\ \hline & 5z - 4i. \quad \leftarrow \text{rest.} & \end{array}$$

Dvs. $z^3 - iz^2 + 3z - 2i = (z-i)(z^2-2) + 5z - 4i$

Lad $p(z)$ være et polynomium af grad $n \geq 1$.

Sætning: z_0 er rod i $p(z)$ $\Leftrightarrow$
$z - z_0$ går op i $p(z)$ ved polynomiers division $\Leftrightarrow$
$p(z) = q(z)(z - z_0)$ for et polynomium $q(z)$ af grad $n-1$.

Lad $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_k$ med $\zeta_i \neq \zeta_j$ for $i \neq j$ være rødderne i $p(z)$. Vi har

$$p(z) = a_n (z - \zeta_1)^{m_1} \cdot (z - \zeta_2)^{m_2} \dots (z - \zeta_k)^{m_k}$$

hvor m_j er multipliciteten af roden ζ_j. Bemærk at $1 \leq m_j \leq n$ og $m_1 + m_2 + \dots + m_k = n$.

Sætning: Lad $p(z)$ være et polynomium af grad $n \geq 1$ med reelle koefficienter. Hvis z_0 er en rod i $p(z)$ så er $\bar{z}_0$ også en rod i $p(z)$. Dermed kan $p(z)$ faktoriseres i reelle 1. og 2. grads polynomier.

Komplekse kvadratrödder: Betragt ligningen

$$z^2 = \alpha + i\beta ,$$

hvor $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Sæt $r = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$. De to løsninger til ligningen er

$$z = \pm \left(\sqrt{\frac{r+\alpha}{2}} + i \cdot \operatorname{sgn}(\beta) \sqrt{\frac{r-\alpha}{2}} \right),$$

hvor $\operatorname{sgn}(\beta) = 1$ for $\beta \geq 0$ og $\operatorname{sgn}(\beta) = -1$ for $\beta < 0$.

Andengradsligningen

$$a z^2 + bz + c = 0 ,$$

hvor $a, b, c \in \mathbb{C}$ og $a \neq 0$. Diskriminant:

$$D = b^2 - 4ac$$

Løsningerne er

$$z = \frac{-b \pm w_0}{2a} ,$$

hvor w_0 er en kompleks kvadratrod af D dvs. $w_0^2 = D$.

Eks. $z^2 + z + 1 = 0$.

$D = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = -3$.

$w_0 = \sqrt{3}\, i$.

$$z = \frac{-1 \pm \sqrt{3}\, i}{2} = \begin{cases} -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i \\ -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i \end{cases}$$