23. kursusgang: Inhomogene anden ordens differentialligninger og superpositionsprincippet.

Betragt differentialligningen

$$ay'' + by' + cy = q(t) \qquad (L)$$

hvor $a, b, c \in \mathbb{R}$ med $a \neq 0$ og $q(t)$ er kontinuert.
Tilhørende homogene ligning og karakterligning:

$$ay'' + by' + cy = 0 \qquad (H)$$

$$aR^2 + bR + c = 0 \qquad (K).$$

<u>Def.</u> Ved en <u>partikulær løsning</u> til (L) forstås en vilkårlig løsning til (L).

<u>Eks.</u>: $y'' + 3y' + 2y = 10e^{3t}$

Vi gætter på, at der findes en partikulær løsning på formen

$$y_p(t) = Ae^{3t},$$

og skal så bestemme konstanten A:

$y_p'(t) = 3Ae^{3t}$, $y_p''(t) = 9Ae^{3t}$ så

$y_p'' + 3y_p' + 2y_p = 9Ae^{3t} + 3\cdot 3Ae^{3t} + 2\cdot Ae^{3t} = 20Ae^{3t}$.

$20A = 10 \Leftrightarrow A = \frac{1}{2}$.

Dvs. $y_p(t) = \frac{1}{2}e^{3t}$ er en partikulær løsning.

Metoden i eksemplet kan forbedres (kraftigt) til følgende resultat:

<u>De ubestemte koefficienters metode</u>

1. $$ay'' + by' + cy = Ct^m e^{rt}$$

har en partikulær løsning på formen

$$y_p(t) = t^s(A_m t^m + A_{m-1}t^{m-1} + \dots + A_0)e^{rt},$$

med

(i) $s=0$ hvis r ikke er en rod i (K).
(ii) $s=1$ hvis r er en simpel rod i (K).
(iii) $s=2$ hvis r er en dobbelt rod i (K).

2.
$$ay'' + by' + cy = C t^m e^{\alpha t} \cdot \begin{cases} \cos(\beta t) \\ \sin(\beta t) \end{cases}$$
har en partikulær løsning på formen
$$y_p(t) = t^s (A_m t^m + A_{m-1} t^{m-1} + \dots + A_0) e^{\alpha t} \cos(\beta t)$$
$$+ \; t^s (B_m t^m + B_{m-1} t^{m-1} + \dots + B_0) e^{\alpha t} \sin(\beta t),$$
med
(iv) $s=0$ hvis $\alpha + i\beta$ ikke er en rod i (K).
(v) $s=1$ hvis $\alpha + i\beta$ er en rod i (K).

<u>Eks.</u>: $y'' + 2y' - 3y = 7\cos(3t) = 7t^0 e^{0\cdot t}\cos(3t)$,
$m=0,\ \alpha=0,\ \beta=3$
$R^2 + 2R - 3 = 0$ har ikke $\alpha + i\beta = 3i$ som rod, så $s=0$.
$y_p(t) = A_0 \cos(3t) + B_0 \sin(3t)$,
hvor A_0 og B_0 skal bestemmes så $y_p'' + 2y_p' - 3y_p = 7\cos(3t)$.

<u>Sætning</u> (Superpositions princippet)
Antag at $y_1(t)$ og $y_2(t)$ opfylder
$$ay_1'' + by_1' + cy_1 = q_1(t),$$
$$ay_2'' + by_2' + cy_2 = q_2(t).$$
Så opfylder $y = k_1 y_1 + k_2 y_2$, hvor $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$, ligningen
$$ay'' + by' + cy = k_1 q_1(t) + k_2 q_2(t).$$
<u>Bevis:</u>
$a(k_1y_1 + k_2y_2)'' + b(k_1y_1 + k_2y_2)' + c(k_1y_1 + k_2y_2) =$
$a(k_1y_1'' + k_2y_2'') + b(k_1y_1' + k_2y_2') + c(k_1y_1 + k_2y_2) =$
$k_1(ay_1'' + by_1' + cy_1) + k_2(ay_2'' + by_2' + cy_2) = k_1 q_1(t) + k_2 q_2(t).$
q.e.d.

Bemærk: Et standard gæt på en partikulær løsning til (L) er et $y_p(t)$ af samme "type" som $q(t)$. Hvis gættet fejler, så multiplicer $y_p(t)$ med t og prøv igen.

Eks. $y'' - 2y' + 5y = 2t + 3$ (Prøveeksamen 1 opg. 1(b))

Vi prøver med $y_p(t) = At + B$.

$y_p'(t) = A$, $y_p''(t) = 0$ så

$y_p'' - 2y_p' + 5y_p = 0 - 2A + 5(At+B) = 5At + 5B - 2A$

$5A = 2 \Leftrightarrow A = \frac{2}{5}$.

$5B - 2A = 3 \Leftrightarrow B = \frac{1}{5}(3+2A)$ så $B = \frac{1}{5}(3 + 2\cdot\frac{2}{5}) = \frac{19}{25}$

Dvs $y_p(t) = \frac{2}{5}t + \frac{19}{25}$ er en partikulær løsning.

Vi har nu metoder til bestemmelse af partikulære løsninger til (L), men hvad med den fuldstændige løsning til (L)?

Sætning: Antag at $y_p(t)$ er en partikulær løsning til (L). Da er den fuldstændige løsning til (L)

$$y(t) = y_p(t) + y_h(t),$$

hvor $y_h(t)$ er den fuldstændige løsning til den tilhørende homogene ligning (H).

Bevis:

Ved superpositionsprincippet er $y(t) = y_p(t) + y_h(t)$ løsninger til (L), men har vi dem alle med? Lad $y_v(t)$ være en vilkårlig løsning til (L). Da er $y_v(t) - y_p(t)$ en løsning til (H) ved superpositions-princippet, og

$$y_v(t) = y_p(t) + \underbrace{(y_v(t) - y_p(t))}_{\text{løsning til (H)}} \qquad \text{q.e.d.}$$

Eks. fortsat. $y'' - 2y' + 5y = 2t+3 \quad (*)$

Tilhørende homogene ligning : $y'' - 2y' + 5y = 0$

Karakterligningen herfor : $R^2 - 2R + 5 = 0$

$D = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = -16 = (4i)^2$, $R = \frac{-(-2) \pm 4i}{2} = 1 \pm 2i$

$y_h(t) = c_1 e^t \cos(2t) + c_2 e^t \sin(2t)$

Den fuldstændige løsning til (*) er $y(t) = y_p(t) + y_h(t)$

dvs.

$$y(t) = \underline{\underline{\frac{2}{5}t + \frac{19}{25} + c_1 e^t \cos(2t) + c_2 e^t \sin(2t)}} \quad ; c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$