23. kursusgang : Repetition
Anden ordens lineære differentialligninger

$$ay'' + by' + cy = q(t) \quad , \quad t \in I$$

- $a, b, c \in \mathbb{R}$ med $a \neq 0$.
- $q(t)$ kontinuert på intervallet I.

Det homogene tilfælde

$ay'' + by' + cy = 0$ (H) homogen ligning.

$aR^2 + bR + c = 0$ (K) tilhørende karakterligning.

$D = b^2 - 4ac$ diskriminanten.

	rødder i (K)	den fuldstændige løsning til (H)
$D > 0$	$r_1 \neq r_2$	$y(t) = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t}$
$D = 0$	r	$y(t) = c_1 e^{rt} + c_2 t e^{rt}$
$D < 0$	$\alpha \pm i\beta$	$y(t) = c_1 e^{\alpha t}\cos(\beta t) + c_2 e^{\alpha t}\sin(\beta t)$

Lineær uafhængighed for funktioner

Lad $y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)$ være funktioner på I.

Def: $y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)$ siges at være lineært uafhængige såfremt

$$c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) + \dots + c_n y_n(t) = 0 \quad \text{for alle } t \in I$$

$$\Rightarrow \quad c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0.$$

Hvis $y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)$ ikke er lineært uafhængige siges de at være lineært afhængige.

Bemærk: To funktioner $y_1(t)$ og $y_2(t)$ er lineært afhængige hvis og kun hvis de er proportionale.

Eks. $y_1(t) = 3\cos(2t)$ og $y_2(t) = \cos^2(t) - \sin^2(t)$ er lineært afhængige da $y_1(t) = 3(\cos^2(t) - \sin^2(t)) = 3y_2(t)$, $t \in \mathbb{R}$

Opgaverne

Eks. Find den fuldstændige løsning til differentialligningen $y'' - y' - 2y = 0$.

$R^2 - R - 2 = 0$, $D = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2) = 9 = 3^2$, $R = \frac{-(-1) \pm 3}{2} = \begin{cases} 2 \\ -1 \end{cases}$

$\underline{\underline{y(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{2t}}}$; $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

Eks. Løs begyndelsesværdiproblemet
$y'' - y' - 2y = 0$; $y(0) = 4$, $y'(0) = 5$

Først findes den fuldstændige løsning til $y'' - y' - 2y = 0$.
Se eks. ovenfor. Dernæst bestemmes c_1 og c_2 :

$y(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{2t} \Rightarrow$

$y'(t) = -c_1 e^{-t} + 2c_2 e^{2t}$.

$$\begin{cases} y(0) = 4 \\ y'(0) = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 e^{-0} + c_2 e^{2\cdot 0} = 4 \\ -c_1 e^{-0} + 2c_2 e^{2\cdot 0} = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 + c_2 = 4 \\ -c_1 + 2c_2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 4 \\ 3c_2 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = 1 \\ c_2 = 3 \end{cases}$$

$y(t) = 1e^{-t} + 3e^{2t} = \underline{\underline{e^{-t} + 3e^{2t}}}$