25. kursusgang : Repetition

Inhomogene anden ordens differentialligninger

$ay'' + by' + cy = q(t)$ (L) Diff. ligning, $a \neq 0$

$ay'' + by' + cy = 0$ (H) Tilhørende homogene lign.

$aR^2 + bR + c = 0$ (K) Karakter ligning.

Sætning : Antag at $y_p(t)$ er en partikulær løsning til (L) (dvs. en vilkårlig løsning). Da er den fuldstændige løsning til (L) givet ved

$$y(t) = y_p(t) + y_h(t) \quad ,$$

hvor $y_h(t)$ er den fuldstændige løsning til den tilhørende homogene ligning (H).

En partikulær løsning kan ofte findes ved de ubestemte koefficienters metode:

$q(t)$	Standard gæt $y_p(t)$
$(k_2 t^2 + k_1 t + k_0) e^{\alpha t}$	$(K_2 t^2 + K_1 t + K_0) e^{\alpha t}$
$(\ell_1 \cos(\beta t) + \ell_2 \sin(\beta t)) e^{\alpha t}$	$(L_1 \cos(\beta t) + L_2 \sin(\beta t)) e^{\alpha t}$

Bemærk : Hvis standard gættet fejler, multiplicer det med t og prøv igen.

Bemærk : $k_2 = 0$: sæt $K_2 = 0$, $k_2 = k_1 = 0$: sæt $K_2 = K_1 = 0$.

Eks: $y'' + 3y' + 2y = t^2$

$t^2 = (1 \cdot t^2 + 0t + 0) e^{0 \cdot t}$, gæt $y_p = K_2 t^2 + K_1 t + K_0$.

$y_p' = 2K_2 t + K_1$, $y_p'' = 2K_2$.

$$y_p'' + 3y_p' + 2y_p = 2K_2 + 3(2K_2 t + K_1) + 2(K_2 t^2 + K_1 t + K_0)$$
$$= 2K_2 t^2 + (2K_1 + 6K_2)t + 2K_0 + 3K_1 + 2K_2$$

$$\left.\begin{array}{l} 2K_2 = 1 \\ 2K_1 + 6K_2 = 0 \\ 2K_0 + 3K_1 + 2K_2 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} K_2 = \frac{1}{2} \\ K_1 = -3K_2 = -\frac{3}{2} \\ K_0 = -\frac{3}{2}K_1 - K_2 = \frac{9}{4} - \frac{1}{2} = \frac{7}{4} \end{array}\right\}.$$

Dvs. $y_p(t) = \frac{1}{2}t^2 - \frac{3}{2}t + \frac{7}{4}$

Sætning: (Superpositions princippet)
Antag at $y_1(t)$ og $y_2(t)$ opfylder
$$a y_1'' + b y_1' + c y_1 = q_1(t) \ ,$$
$$a y_2'' + b y_2' + c y_2 = q_2(t) \ .$$
Så opfylder $y = k_1 y_1 + k_2 y_2$, hvor $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$, ligningen
$$a y'' + b y' + c y = k_1 q_1(t) + k_2 q_2(t).$$

Sætning: (Eksistens og entydighed)
Lad $a, b, c \in \mathbb{R}$ med $a \neq 0$. Antag at $q(t)$ er en kontinuert funktion defineret på et interval I.
For ethvert $Y_0 \in \mathbb{R}$, $Y_1 \in \mathbb{R}$ og $t_0 \in I$ findes netop én løsning til begyndelsesværdiproblemet
$$a y'' + b y' + c y = q(t) \ , \ t \in I$$
$$y(t_0) = Y_0 \ , \ y'(t_0) = Y_1 \ .$$