Øvelse 4.1 $\mathbb{E}(X) = \mu \quad \mathbb{V}(X) = \sigma^2 \quad Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$

Vis $\mathbb{E}(Z) = 0$ og $\mathbb{V}(Z) = 1$

Sætning 2 s99:

$$\mathbb{E}\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma}\mathbb{E}(X) - \frac{\mu}{\sigma} = \frac{\mu}{\sigma} - \frac{\mu}{\sigma} = 0 \quad \checkmark$$

$$\mathbb{V}\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma^2}\mathbb{V}(X) = \frac{\sigma^2}{\sigma^2} = 1 \quad \checkmark$$

Øvelse 4.12 X og Y uafhængige med ens varians σ^2.

$$\mathbb{V}(X+Y) \overset{\text{sætn 6}}{=} \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y) = 2\sigma^2$$

$$\mathbb{V}(2X) \overset{\text{sætn 2}}{=} 2^2\,\mathbb{V}(X) = 4\sigma^2$$

dvs. $2X$ har størst varians

Opgave 5.1

$X \sim N(10, 0.04)$ dvs. $\frac{X-10}{0.2} \sim N(0,1)$

$$P(10-a < X < 10+a) = P\left(-\frac{a}{0.2} < \frac{X-10}{0.2} < \frac{a}{0.2}\right) = \Phi\left(\frac{a}{0.2}\right) - \Phi\left(-\frac{a}{0.2}\right)$$

$$= 2\Phi\left(\frac{a}{0.2}\right) - 1 = 0{,}95$$

$\Rightarrow \Phi\left(\frac{a}{0.2}\right) = 0{,}975$ opslag: $\frac{a}{0.2} = 1{,}96 \Leftrightarrow \underline{\underline{a = 0.392}}$ 95 % ss. for at X ligger mellem 10-0.392 og 10+0.392

$Y \sim N(10, 0.04)$ X og Y uafh dvs $\frac{X+Y}{2} \sim N(10, 0.02)$ sætn 8

dvs $\frac{\frac{X+Y}{2}-10}{\sqrt{0.02}} \sim N(0,1)$

$$P\left(10-b < \frac{X+Y}{2} < 10+b\right) = P\left(-\frac{b}{\sqrt{0.02}} < \frac{\frac{X+Y}{2}-10}{\sqrt{0.02}} < \frac{b}{\sqrt{0.02}}\right) = 2\Phi\left(\frac{b}{\sqrt{0.02}}\right) - 1 = 0{,}95$$

$\Rightarrow \frac{b}{\sqrt{0.02}} = 1{,}96 \Leftrightarrow \underline{\underline{b = 0.277}}$ 95% for at gennemsnittet ligger mellem 10 - 0.277 og 10 + 0.277

Altså gennemsnittet mindre interval med samme ss. → Flere målinger mere nøjagtig/sikker

Opgave 5.2 Vinkel β målt med spredning $\sigma = 5$ mgon X: måling

Antag $X \sim \mathcal{N}(\beta, \sigma^2)$

n uafhængige målinger $\bar{X} = \frac{1}{n}(X_1 + \dots + X_n)$

dvs. $\frac{\bar{X} - \beta}{\sigma/\sqrt{n}} \sim \mathcal{N}(0,1)$ (sætn 8)

Bestem n således

Hvor mange satser for at være ~~dvs.~~ 95% sikker på fejl mindre end 3 mgon

$$P(|\bar{X} - \beta| < 3 \text{ mgon}) = 0.95$$
$$\Updownarrow$$
$$P(-3 < \bar{X} - \beta < 3) = 0.95$$
$$\Updownarrow$$
$$P\left(-\frac{3}{\sigma/\sqrt{n}} < \frac{\bar{X} - \beta}{\sigma/\sqrt{n}} < \frac{3}{\sigma/\sqrt{n}}\right) = 0.95$$
$$\Updownarrow$$
$$\Phi\left(\frac{3}{\sigma/\sqrt{n}}\right) - \Phi\left(-\frac{3}{\sigma/\sqrt{n}}\right) = 0.95$$
$$\Updownarrow$$
$$2\Phi\left(\frac{3}{\sigma/\sqrt{n}}\right) - 1 = 0.95$$
$$\Updownarrow$$
$$\frac{3}{\sigma/\sqrt{n}} = 1.96 \Leftrightarrow \frac{3}{5/\sqrt{n}} = 1.96 \Leftrightarrow 0.6\sqrt{n} = 1.96 \Leftrightarrow n = 10.67$$

Dvs. vinkel skal måles med 11 satser eller flere for at være 95% eller mere sikker på at begå fejl, der er mindre end 3 mgon. ved at bruge gennemsnittet.

Opgave 5.3 3 uafh retningsmålinger R_1, R_2, R_3 ens varians σ^2

vinkelmålingerne $X = R_2 - R_1$ $Y = R_3 - R_1$

Vis $\rho(X,Y) = 0.5$

uafh $\Rightarrow$ $Cov(R_i, R_j) = 0$ $i \neq j$ $Cov(R_i, R_j) = \sigma^2$ $i = j$

$Cov(X,Y) = Cov(R_2 - R_1, R_3 - R_1)$

cov 4.17 $= Cov(R_2, R_3) - Cov(R_2, R_1) - Cov(R_1, R_3) + Cov(R_1, R_1) = \sigma^2$

$V(X) = Cov(R_2 - R_1, R_2 - R_1)$

$= Cov(R_2, R_2) - Cov(R_2, R_1) - Cov(R_1, R_2) + Cov(R_1, R_1) = 2\sigma^2$

$V(Y) = 2\sigma^2$ (analog)

$$\rho(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{V(X)V(Y)}} = \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\sigma^2 2\sigma^2}} = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$