1. kursusgang: Introduktion til matricer og vektorer II

Def. En linearkombination af vektorerne $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_k$ i $\mathbb{R}^n$ er en vektor af formen

$$c_1\vec{u}_1 + c_2\vec{u}_2 + \dots + c_k\vec{u}_k \,,$$

hvor $c_1, c_2, \dots, c_k$ er skalarer. Disse skalarer kaldes koefficienterne eller vægtene for linearkombinationen.

Eks. $$(-3)\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} + 4\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix} + 1\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}(-3)\cdot 1 + 4\cdot 1 + 1\cdot 1\\(-3)\cdot 1 + 4\cdot 3 + 1\cdot(-1)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\8\end{bmatrix}$$

Dvs $\begin{bmatrix}2\\8\end{bmatrix}$ er en linearkombination af $\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}$ og $\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$.

Eks. $$\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix} = a\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} + b\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix} = a\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} + b\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} + c\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} \quad \text{etc.}$$

Def. Standard basis vektorerne for $\mathbb{R}^n$ er

$$\vec{e}_1 = \begin{bmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix},\ \vec{e}_2 = \begin{bmatrix}0\\1\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix},\ \dots,\ \vec{e}_n = \begin{bmatrix}0\\\vdots\\0\\1\end{bmatrix}$$

Bemærk: For enhver vektor $\vec{v} = \begin{bmatrix}v_1\\v_2\\\vdots\\v_n\end{bmatrix}$ i $\mathbb{R}^n$ er

$$\vec{v} = v_1\vec{e}_1 + v_2\vec{e}_2 + \dots + v_n\vec{e}_n. \qquad (*)$$

Def. Lad A være en $m\times n$-matrix med søjlevektorerne $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ og lad $\vec{v} = \begin{bmatrix}v_1\\v_2\\\vdots\\v_n\end{bmatrix}$ være en $n\times 1$-vektor. Da er matrix-vektor produktet $A\vec{v}$ defineret som $m\times 1$-vektoren

$$A\vec{v} = v_1\vec{a}_1 + v_2\vec{a}_2 + \dots + v_n\vec{a}_n.$$

Eks: $A = \begin{bmatrix}1&2\\3&4\\5&6\end{bmatrix}$, $\vec{v} = \begin{bmatrix}7\\8\end{bmatrix}$ så er

$$A\vec{v} = \begin{bmatrix}1&2\\3&4\\5&6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}7\\8\end{bmatrix} = 7\begin{bmatrix}1\\3\\5\end{bmatrix} + 8\begin{bmatrix}2\\4\\6\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}7\\21\\35\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}16\\32\\48\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}23\\53\\83\end{bmatrix}$$

Hurtigere : $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7\cdot 1 + 8\cdot 2 \\ 7\cdot 3 + 8 \cdot 4 \\ 7\cdot 5 + 8\cdot 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 23 \\ 53 \\ 83 \end{bmatrix}$.

<u>Def.</u> $n\times n$-<u>identitetsmatricen</u> I_n er $n\times n$-matricen med søjlerne $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$.

<u>Eks.</u>

$$I_1 = [1],\ I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\ I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\ I_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \ldots$$

<u>Bemærk</u> : Af ⊛ fås

$$I_n \vec{v} = \vec{v} \quad \text{for alle } \vec{v} \in \mathbb{R}^n.$$

<u>Sætning</u> : Lad A, B være $m\times n$-matricer og $\vec{u}, \vec{v}$ vektorer i $\mathbb{R}^n$. Da gælder

(1) $A(\vec{u}+\vec{v}) = A\vec{u} + A\vec{v}$

(2) $A(c\vec{u}) = c(A\vec{u})$ for alle $c \in \mathbb{R}$

$\Big\}$ linearitet

(3) $(A+B)\vec{u} = A\vec{u} + B\vec{u}$

(4) $A\vec{e}_j = \vec{a}_j$ for $j = 1, 2, \ldots, n$, hvor $\vec{a}_j$ er $j$te søjlevektor i A.

(5) Hvis $A\vec{w} = B\vec{w}$ for alle $\vec{w} \in \mathbb{R}^n$, så er $A = B$.

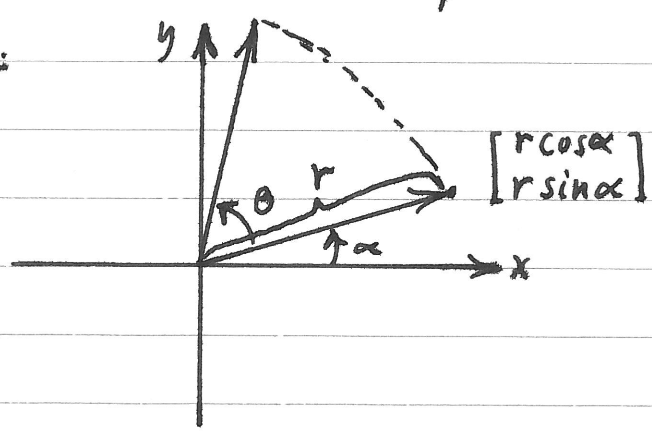
(6) $A\vec{0} = \vec{0}$ og $O\vec{v} = \vec{0}$.

<u>Bevis for (1)</u>:

$$\vec{u} + \vec{v} = \begin{bmatrix} u_1 + v_1 \\ u_2 + v_2 \\ \vdots \\ u_n + v_n \end{bmatrix} \text{ så}$$

$$\begin{aligned} A(\vec{u}+\vec{v}) &= (u_1+v_1)\vec{a}_1 + (u_2+v_2)\vec{a}_2 + \ldots + (u_n+v_n)\vec{a}_n \\ &= (u_1\vec{a}_1 + u_2\vec{a}_2 + \ldots + u_n\vec{a}_n) + (v_1\vec{a}_1 + v_2\vec{a}_2 + \ldots + v_n\vec{a}_n) \\ &= A\vec{u} + A\vec{v} \quad \text{q.e.d.} \end{aligned}$$

<u>Eks.</u>



Rotationsmatricen

$$A_\theta = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}.$$

$$A_\theta \begin{bmatrix} r\cos\alpha \\ r\sin\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r\cos\theta\cos\alpha - r\sin\theta\sin\alpha \\ r\sin\theta\cos\alpha + r\cos\theta\sin\alpha \end{bmatrix} \overset{\text{additionsformlerne}}{=} \begin{bmatrix} r\cos(\theta+\alpha) \\ r\sin(\theta+\alpha) \end{bmatrix}$$