1. kursusgang: Introduktion til matricer og vektorer I

Def. En <u>$m \times n$-matrix</u> A er et rektangulært skema af reelle tal med m rækker og n søjler. Tallet i i'te række og j'te søjle kaldes <u>(i,j)'te indgang</u> og betegnes a_{ij} eller $[A]_{ij}$.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Eks.

$$A = \begin{array}{cc} & 1 \\ 3 & \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 15 & 20 \\ 45 & 64 \end{bmatrix} \end{array}$$

3×2-matrix

$[A]_{31} = a_{31} = 45$, $[A]_{12} = a_{12} = 8$

$$B = \begin{bmatrix} 13 \\ -1 \end{bmatrix}$$

2×1-matrix

$b_{11} = 13$, $b_{21} = -1$

Def. En <u>skalar</u> er et reelt tal. Mængden af reelle tal betegnes $\mathbb{R}$.

Def. Lad A og B være $m \times n$-matricer og c en skalar.

(1) $A + B$ er $m \times n$-matricen med $[A+B]_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$

(2) cA er $m \times n$-matricen med $[cA]_{ij} = ca_{ij}$

(3) $-B = (-1)B$ og $A - B = A + (-B)$. Bemærk at $[A-B]_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$

(4) Nulmatricen O er $m \times n$-matricen med $[O]_{ij} = 0$.

Bemærk: Hvis A og B har forskellige formater er $A+B$ ikke defineret.

Eks: $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 2 & -3 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -4 & 1 & 0 \\ 5 & -6 & 1 \end{bmatrix}$

$$A + B = \begin{bmatrix} 3+(-4) & 4+1 & 2+0 \\ 2+5 & -3+(-6) & 0+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 5 & 2 \\ 7 & -9 & 1 \end{bmatrix},$$

$$3A = \begin{bmatrix} 3 \cdot 3 & 3 \cdot 4 & 3 \cdot 2 \\ 3 \cdot 2 & 3 \cdot (-3) & 3 \cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 12 & 6 \\ 6 & -9 & 0 \end{bmatrix}.$$

Sætning: Lad A, B, C være $m \times n$-matricer og s, t skalarer. Da gælder

(1) $A + B = B + A$ (kommutative lov for +)

(2) $(A+B)+C = A+(B+C)$ (associative lov for +)

(3) $A + 0 = A$

(4) $A + (-A) = 0$

(5) $(st)A = s(tA)$

(6) $s(A+B) = sA + sB$

(7) $(s+t)A = sA + tA$

Bevis: (1) Begge sider er $m \times n$-matricer og $[A+B]_{ij} = a_{ij} + b_{ij} = b_{ij} + a_{ij} = [B+A]_{ij}$ så $A+B = B+A$.
(2)-(7) tilsvarende q.e.d.

Def. Lad A være en $m \times n$-matrix. Den transponerede matrix A^T er $n \times m$-matricen med $[A^T]_{ij} = a_{ji}$.
Dvs. transponering bytter om på rækker og søjler og vice versa.

Eks. $A = \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 15 & 20 \\ 45 & 64 \end{bmatrix}$, $A^T = \begin{bmatrix} 6 & 15 & 45 \\ 8 & 20 & 64 \end{bmatrix}$.

Sætning:

(1) $(A+B)^T = A^T + B^T$

(2) $(sA)^T = sA^T$

(3) $(A^T)^T = A$

Bevis: (1) Begge sider ~~har~~ samme format og
$[(A+B)^T]_{ij} = [A+B]_{ji} = a_{ji} + b_{ji} = [A^T]_{ij} + [B^T]_{ij} = [A^T + B^T]_{ij}$.
(2) og (3) tilsvarende q.e.d.

Def. En $1 \times n$-matrix kaldes en <u>rækkevektor</u> og en $m \times 1$-matrix en <u>søjlevektor</u>. Begge typer kaldes en <u>vektor</u>. Indgangene i en vektor kaldes koordinater. (Vi bruger normalt søjlevektorer)

<u>Notation</u>: $\vec{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_m \end{bmatrix}$, nulvektoren $\vec{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$.

<u>Eks</u>: $\vec{a} = [3 \quad 9 \quad 7] = (3,9,7)$, $\vec{b} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ -1 \\ 9 \end{bmatrix}$.

rækkevektor søjlevektor

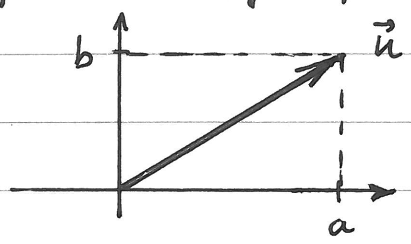
For $\vec{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ 7 \end{bmatrix}$, $\vec{v} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$ er

$\vec{u} + \vec{v} = \begin{bmatrix} 2+5 \\ -4+3 \\ 7+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ -1 \\ 7 \end{bmatrix}$ og $5\vec{v} = \begin{bmatrix} 5 \cdot 5 \\ 5 \cdot 3 \\ 5 \cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25 \\ 15 \\ 0 \end{bmatrix}$

Def. $\mathbb{R}^m$ betegner mængden af søjlevektorer med m koordinater.

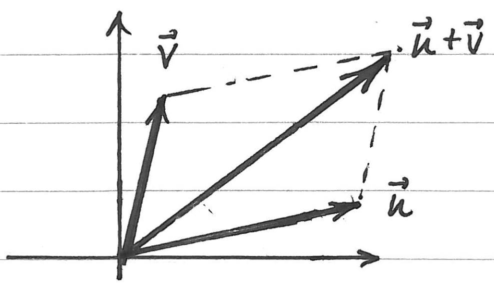
<u>Husk</u>: geometrisk fortolkning af vektorer i $\mathbb{R}^2$.

$\vec{u} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$

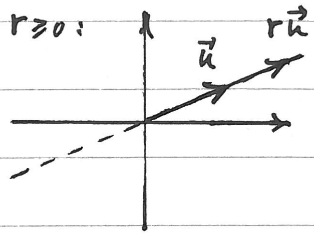


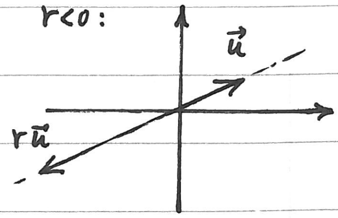
$\vec{v} = \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}$

$\vec{u} + \vec{v} = \begin{bmatrix} a+c \\ b+d \end{bmatrix}$



$r\vec{u} = \begin{bmatrix} ra \\ rb \end{bmatrix}$





Tilsvarende for vektorer i $\mathbb{R}^3$.