2. kursusgang: Lineære ligningssystemer

Def. Et <u>lineært ligningssystem</u> i de variable $x_1, x_2, \dots, x_n$, er et ligningssystem der kan skrives på formen

$$\begin{matrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{matrix}$$

, hvor a_{ij} og b_i er ~~konstanter.~~ skalarer.

<u>Løsningsmængden</u> til systemet er mængden af samtlige løsninger. Systemets <u>totalmatrix</u> er

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}}_{\vec{b}}$$

Delmatricen A kaldes <u>koefficientmatricen</u>. $\vec{b}$ kaldes konstantvektoren.

<u>Bemærk</u>: Ligningssystemet kan skrives $A\vec{x} = \vec{b}$ hvor $\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$.

<u>Eks.</u>
$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - x_3 &= 3 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 &= 3 \\ 3x_1 + x_2 \quad &= 2 \end{aligned} \qquad \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right]$$

<u>Eks.</u>
$$\begin{aligned} 5x_1 + 2x_2 + 7x_3 - x_4 &= 10 \\ 13x_1 - x_2 + \quad 7x_4 &= -6 \end{aligned} \qquad \left[\begin{array}{cccc|c} 5 & 2 & 7 & -1 & 10 \\ 13 & -1 & 0 & 7 & -6 \end{array}\right]$$

<u>Eks.</u>
$$\begin{aligned} x_1^2 + 2x_2 &= 3 \\ x_1 - x_2 &= 7 \end{aligned}$$
er <u>ikke</u> et lineært ligningssystem.

Vi vil beskrive en løsningsmetode via såkaldte rækkeoperationer på totalmatricen.

<u>Notation</u>: r_i står for række nr. i.

Def. De <u>elementære rækkeoperationer</u> er

- $r_j \leftrightarrow r_i$ ombytning
- $cr_j \to r_j$, $c \neq 0$ skalering
- $r_j + kr_i \to r_j$, $i \neq j$ erstatning

(omvendte operationer)

- $r_j \leftrightarrow r_i$
- $\frac{1}{c} r_j \to r_j$
- $r_j - kr_i \to r_j$

Rækkereduktion: Udfør en sekvens af elementære rækkeoperationer på en matrix.

Eks.

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{-2r_1 + r_2 \to r_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & -3 & -3 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{-\frac{1}{3}r_2 \to r_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Bemærk: Løsningsmængden for det tilhørende ligningssystem ændres ikke ved disse rækkeoperationer.

Strategi: Rækkereducer til en "simpel form" hvor løsningsmængden kan aflæses.

Def. En matrix er på række echelon form (REF) også kaldet trappeform hvis:

1. Eventuelle nulrækker står nederst
2. Første ikke-nul indgang (fra venstre) i hver række, er til højre for første ikke-nul indgang i rækken ovenfor.

Eks.

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 & 2 \\ 0 & -7 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 3 & -6 & 7 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 7 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Def. En første ikke-nul indgang i en række af en matrix på REF kaldes et pivot

Def. En matrix er på reduceret række echelon form (RREF) hvis

1. Matricen er på REF.
2. Alle pivoterne har værdien 1.
3. Alle indgangene over pivoterne har værdien 0.

Eks.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 7 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Sætning: En given matrix kan rækkereduceres til en og kun en matrix på RREF.
(bevis udeladt).

Fra RREF til den fuldstændige løsning

Eks.

$$\begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 & \\ \end{array}$$
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right] \qquad x_1 = 1,\quad x_2 = -2,\quad x_3 = 3$$

Eks.

$$\begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array}$$
$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 7 & 5 & 8 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \qquad \begin{cases} x_1 + 7x_3 + 5x_4 = 8 \\ x_2 + 2x_3 - x_4 = 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = 8 - 7x_3 - 5x_4 \\ x_2 = 2 - 2x_3 + x_4 \\ x_3 \text{ fri} \\ x_4 \text{ fri} \end{cases}$$

x_1 og x_2 er bundne variable (pivot nedenunder)

x_3 og x_4 er frie variable

Udtryk de bundne variable ved de frie variable

På vektorform

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} -7 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad ; \quad x_3 \,, x_5 \in \mathbb{R}$$

<u>Eks.</u>

$$\begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 & \\ \end{array}$$
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \leftarrow \quad 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = -2 \quad \text{Ingen løsninger}$$

<u>Def.</u> Et ligningssystem kaldes <u>konsistent</u> hvis løsningsmængden er ikke-tom og <u>inkonsistent</u> hvis løsningsmængden er tom.

<u>Løsningsprocedure</u>

1. Skriv totalmatricen $[A|\vec{b}]$ for systemet ned.
2. Rækkereducer $[A|\vec{b}]$ til RREF $[R|\vec{c}]$
3. Hvis $[R|\vec{c}]$ indeholder en række af formen

$$[0 \ 0 \ \dots \ 0 \mid 1]$$

er systemet inkonsistent. Hvis ikke er systemet konsistent. Skriv ligningssystemet hørende til $[R|\vec{c}]$ ned. Den fuldstændige løsning fås ved at udtrykke de bundne variable ved de frie.

<u>Gauss ellimination</u> (en algoritme for 2.)

<u>Def.</u> Lad A være en matrix og R dens tilhørende RREF. Hvis en søjle i R indeholder et pivot, kaldes den tilsvarende søjle i A en <u>pivotsøjle</u>.

<u>Def.</u>

$$\text{rang}(A) = \text{antal pivotsøjler i } A$$
$$\text{nullitet}(A) = \text{antal ikke-pivot søjler i } A$$

<u>Bemærk</u>: $\text{rang}(A) + \text{nullitet}(A) = n$,
hvor n er antallet af søjler i A.

[Projektor: Gauss ellimination]

<u>Eks.</u>

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & -4 & -5 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 6 & 0 & -6 & 5 & 16 & 7 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & -5 & 2 & 5 \\ 0 & 6 & 0 & -6 & 5 & 16 & 7 \end{bmatrix} \xrightarrow{-6r_1 + r_3 \to r_3}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & -5 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 6 & -12 & -13 & 10 & 13 \end{bmatrix} \xrightarrow{-3r_2+r_3 \to r_3} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & -5 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 4 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{2}r_3 \to r_3}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & -5 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow[-3r_3+r_1 \to r_1]{5r_3+r_2 \to r_2} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{2}r_2 \to r_2}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_2+r_1 \to r_1} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

på RREF.