3. kursusgang: Linear afhængighed og linear uafhængighed.

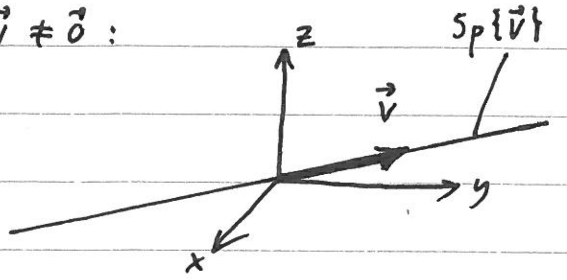
__Def.__ Lad $S = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k\}$ være en mængde af vektorer i $\mathbb{R}^n$. __Spændet__ af S er mængden af samtlige linearkombinationer af vektorerne i S:

$$Sp(S) = \{c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + \dots + c_k\vec{v}_k \mid c_1, c_2, \dots, c_k \in \mathbb{R}\}$$

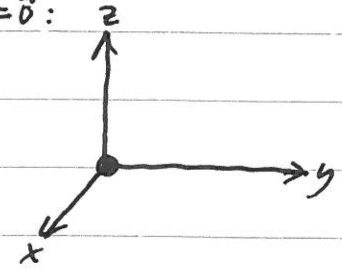
__Eks.__ Spænd af vektorer i $\mathbb{R}^3$.

$Sp\{\vec{v}\} = \{c\vec{v} \mid c \in \mathbb{R}\}$

$\vec{v} \neq \vec{0}$:



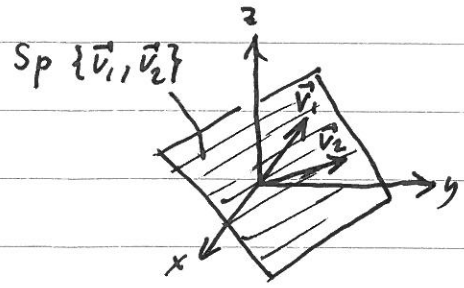
$\vec{v} = \vec{0}$:



$Sp\{\vec{0}\} = \{c\vec{0} \mid c \in \mathbb{R}\} = \{\vec{0}\}$

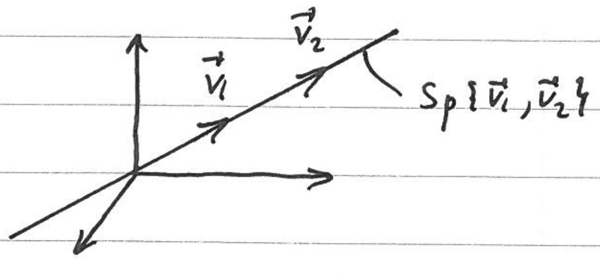
$Sp\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\} = \{c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 \mid c_1, c_2 \in \mathbb{R}\}$

$\vec{v}_1$ og $\vec{v}_2$ ikke-nul og ikke parallelle:



plan gennem O

$\vec{v}_1$ og $\vec{v}_2$ ikke-nul og parallelle



linje gennem O

__Sætning__: For $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ gælder at $\vec{v} \in Sp(S)$ hvis og kun hvis ligningssystemet med totalmatricen

$$[\vec{v}_1 \;\; \vec{v}_2 \;\; \dots \;\; \vec{v}_k \mid \vec{v}\,]$$

er konsistent.

__Bevis__: Sæt $A = [\vec{v}_1 \;\; \vec{v}_2 \;\; \dots \;\; \vec{v}_k]$ og $\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \end{bmatrix}$. Vi har

$\vec v \in Sp(S) \Leftrightarrow x_1\vec v_1 + x_2\vec v_2 + \dots + x_n\vec v_n = \vec v$ konsistent

$\Leftrightarrow A\vec x = \vec v$ konsistent

$\Leftrightarrow [A \mid \vec v]$ totalmatrix for konsistent system. q.e.d.

<u>Eks.</u> Er $\vec v = \begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix}$ ispændet af $S = \left\{ \begin{bmatrix}2\\-1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix} \right\}$?

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_3} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[-2r_1 + r_3 \to r_3]{r_1 + r_2 \to r_2} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -3 \end{array}\right] \xrightarrow{r_2 + r_3 \to r_3} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} x_1 & x_2 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \end{array}$$

Konsistent så $\vec v \in Sp(S)$. Vi ser også at $2\begin{bmatrix}2\\-1\\1\end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix}$.

<u>Sætning</u>: Betragt vektorerne $S = \{\vec v_1, \vec v_2, \dots, \vec v_n\}$ i $\mathbb{R}^m$ og lad A være $m \times n$-matricen $[\vec v_1\ \vec v_2\ \dots\ \vec v_n]$. Følgende betingelser er ækvivalente:

(1) Vektorerne i S udspænder $\mathbb{R}^m$ dvs. $Sp(S) = \mathbb{R}^m$

(2) $A\vec x = \vec b$ er konsistent for alle $\vec b \in \mathbb{R}^m$

(3) A's RREF har et pivot i hver række

(4) $\text{rang}(A) = m$

<u>Bevis</u>: (1) $\Leftrightarrow$ (2) ved sætningen ovenfor. (3) $\Leftrightarrow$ (4) OK.

(3) $\Rightarrow$ (2): Lad R være A's RREF.

$[A \mid \vec b] \longrightarrow [R \mid \vec c]$ $[0\ 0 \dots 0 \mid 1]$ forekommer ikke så konsistent.

(2) $\Rightarrow$ (3): $A \to R$ omvendte rækkeoperationer giver

$R \to A$ og $[R \mid \vec e_m] \to [A \mid \vec d]$. Heraf $[A \mid \vec d] \to [R \mid \vec e_m]$.

Ved (2) er $[A \mid \vec d]$ konsistent hvormed R har et pivot i hver række.

q.e.d.

<u>Bemærk</u>: Hvis $n < m$ er $Sp\{\vec v_1, \vec v_2, \dots, \vec v_n\} \neq \mathbb{R}^m$

<u>Sætning</u>: Lad $S = \{\vec v_1, \vec v_2, \dots, \vec v_n\}$ være vektorer i $\mathbb{R}^n$ og lad $\vec v \in \mathbb{R}^n$.
Da gælder

$Sp\{\vec v_1, \vec v_2, \dots, \vec v_n, \vec v\} = Sp\{\vec v_1, \vec v_2, \dots, \vec v_n\} \Leftrightarrow \vec v \in Sp(S)$.

(Bevis udeladt.)

Def. Vektorerne $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k \in \mathbb{R}^m$ siges at være lineært uafhængige såfremt ligningen

$$x_1\vec{v}_1 + x_2\vec{v}_2 + \dots + x_k\vec{v}_k = \vec{0}$$

kun har løsningen $x_1 = x_2 = \dots = x_k = 0$. Ellers kaldes vektorerne lineært afhængige.

Sætning: Vektorerne $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k \in \mathbb{R}^m$ er lineært afhængige hvis og kun hvis $\vec{v}_1 = \vec{0}$ eller der findes et $i \geq 2$ så $\vec{v}_i \in Sp\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_{i-1}\}$.

Bevis:

$\Rightarrow$) Antag $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k$ er lineært afhængige.
Hvis $\vec{v}_1 = \vec{0}$ er vi færdige så antag $\vec{v}_1 \neq \vec{0}$. Da findes $c_1, c_2, \dots, c_k$, ikke alle nul, så $c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + \dots + c_k\vec{v}_k = \vec{0}$.
Sæt $i = \max\{j \mid c_j \neq 0\}$. Bemærk at $i \geq 2$ for hvis $i = 1$ er $c_1\vec{v}_1 = \vec{0}$ men $c_1 \neq 0$ og $\vec{v}_1 \neq \vec{0}$. Vi har

$$c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + \dots + c_i\vec{v}_i = \vec{0}, \quad c_i \neq 0$$

hvoraf $\vec{v}_i = -\frac{c_1}{c_i}\vec{v}_1 - \frac{c_2}{c_i}\vec{v}_2 - \dots - \frac{c_{i-1}}{c_i}\vec{v}_{i-1}$. OK.

$\Leftarrow$) Hvis $\vec{v}_1 = \vec{0}$ er $\underline{1}\,\vec{v}_1 + 0\vec{v}_2 + \dots + 0\vec{v}_k = \vec{0}$. OK
Hvis $\vec{v}_i \in Sp\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_{i-1}\}$ for et $i \geq 2$, findes der $c_1, c_2, \dots, c_{i-1}$ så $\vec{v}_i = c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + \dots + c_{i-1}\vec{v}_{i-1}$. Dermed er

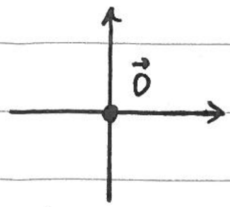
$$c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + \dots + c_{i-1}\vec{v}_{i-1} \underline{+(-1)}\vec{v}_i + 0\vec{v}_{i+1} + \dots + 0\vec{v}_k = \vec{0} \quad \text{Ok.}$$

q.e.d.

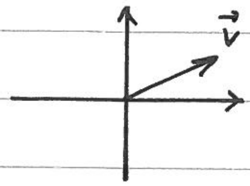
Eks. Hvis $\vec{v}_1 \neq 0$ er $\vec{v}_1$ lineært uafhængig. Nulvektoren $\vec{0}$ er lineært afhængig.

Eks. $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ er lineært afhængige hvis og kun hvis $\vec{v}_1 = \vec{0}$ eller $\vec{v}_2 = c\vec{v}_1$ for en skalar c.

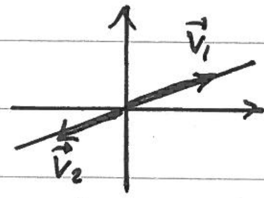
Eks. Vektorer i $\mathbb{R}^2$



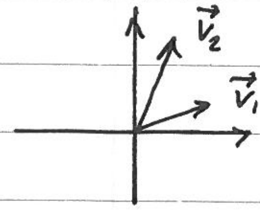
lin. afh.



lin. uafh.

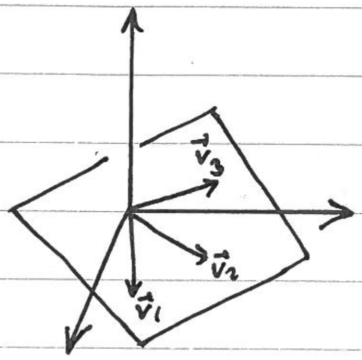


lin. afh.

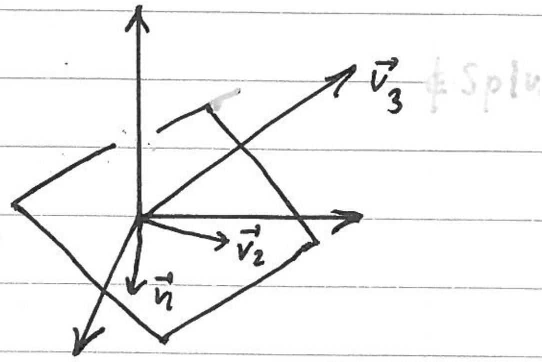


lin. uafh.

Eks.



lin. afh.



lin. uafh.

Sætning: Betragt vektorerne $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ i $\mathbb{R}^m$ og lad A være $m \times n$-matricen $[\vec{v}_1 \ \vec{v}_2 \ \dots \ \vec{v}_n]$. Følgende betingelser er ækvivalente:

(1) $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ er lineært uafhængige

(2) Ligningssystemet $A\vec{x} = \vec{0}$ har ingen fri variabel

(3) A's RREF har et pivot i hver søjle

(4) $\text{rang}(A) = n$

Bevis:

(2) $\Leftrightarrow$ (3) $\Leftrightarrow$ (4) OK. Betingelse (1) er ækvivalent med

(1') $A\vec{x} = \vec{0}$ har $\vec{x} = \vec{0}$ som eneste løsning.

Da systemet $[A \mid \vec{0}]$ er konsistent, ser vi at (1') $\Leftrightarrow$ (2).

q.e.d.

Bemærk: Hvis $n > m$ er $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n \in \mathbb{R}^m$ altid lineært afhængige.