

3. kursgang : Repetition

Ex: Lineært ligningsystem

Total matrix

$$\begin{aligned} 3x_1 + 5x_2 - 4x_3 &= 7 \\ -3x_1 - 2x_2 + 4x_3 &= -1 \\ 6x_1 + x_2 - 8x_3 &= -4 \end{aligned}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 5 & -4 & 7 \\ -3 & -2 & 4 & -1 \\ 6 & 1 & -8 & -4 \end{array} \right]$$

Koefficientmatrix

Elementære rækkeoperationer

- $r_i \leftrightarrow r_j$ ombytning
- $c r_j \rightarrow r_j, c \neq 0$ skalering
- $r_j + k r_i \rightarrow r_j, i \neq j$ erstatning

Ex:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 5 & -4 & 7 \\ -3 & -2 & 4 & -1 \\ 6 & 1 & -8 & -4 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{r_1 + r_2 \rightarrow r_2 \\ -2r_1 + r_3 \rightarrow r_3}} \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 5 & -4 & 7 \\ 0 & 3 & 0 & 6 \\ 0 & -9 & 0 & -18 \end{array} \right] \xrightarrow{3r_2 + r_3 \rightarrow r_3}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 5 & -4 & 7 \\ 0 & 3 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{\frac{1}{3}r_2 \rightarrow r_2 \\ -5r_2 + r_1 \rightarrow r_1}} \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & -4 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{\frac{1}{3}r_1 \rightarrow r_1}$$

på REF

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{4}{3} & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

x_1, x_2 bundne variable (pivot
nedenunder)

x_3 fri variabel

på RREF

$$\begin{cases} x_1 - \frac{4}{3}x_3 = -1 \\ x_2 = 2 \\ x_3 \text{ fri} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = -1 + \frac{4}{3}x_3 \\ x_2 = 2 \\ x_3 \text{ fri} \end{cases}$$

Den generelle
løsning

På vektorform:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} \frac{4}{3} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad x_3 \in \mathbb{R}$$

Def. Et ligningssystem kaldes konsistent hvis løsningsmængden er ikke-tom og inkonsistent hvis løsningsmængden er tom.

Ex:

$$\begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & \\ \hline \textcircled{1} & 0 & 2 & 0 \\ 0 & \textcircled{1} & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \textcircled{1} \end{array} \leftarrow 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 1 \text{ inkonsistent.}$$

Løsningsprocedure

1. Skriv totalmatricen $[A | \vec{b}]$ for systemet med.
2. Rækkereducer $[A | \vec{b}]$ til RREF $[R | \vec{c}]$
3. Hvis $[R | \vec{c}]$ indeholder en række af formen $[0 \ 0 \ \dots \ 0 \ | \ 1]$

er systemet inkonsistent.* Hvis ikke er systemet konsistent. Skriv ligningssystemet hørende til $[R | \vec{c}]$ med. Den fuldstændige løsning fås ved at udtrykke de bundne variable ved de frie.

Ætning: En given matrix kan rækkereduceres til en og kun en matrix på RREF.

Def. Lad A være en $m \times n$ -matrix og R en RREF for A .

$\text{rang}(A) =$ antal søjler i R der indeholder et pivot

$\text{nullitet}(A) =$ antal søjler i R der ikke indeholder et pivot

Bemærk:

$$\text{rang}(A) + \text{nullitet}(A) = n.$$

Opgaverne: Bemærk at "augmented matrix" = "totalmatrix".

* REF er nok til at se dette.