4. kursusgang: Matrixalgebra

Husk: Linearitetsegenskaberne for matrix-vektor produktet

(1) $A(\vec{u}+\vec{v}) = A\vec{u} + A\vec{v}$

(2) $A(c\vec{u}) = c(A\vec{u})$.

Lad A være en $m\times n$-matrix, $B = [\vec{b}_1\ \vec{b}_2\ \dots\ \vec{b}_p]$ en $n\times p$-matrix og $\vec{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_p \end{bmatrix}$ en $p\times 1$-vektor. Vi har

$$B\vec{v} = v_1\vec{b}_1 + v_2\vec{b}_2 + \dots + v_p\vec{b}_p \in \mathbb{R}^n,$$

$$\begin{aligned} A(B\vec{v}) &= A(v_1\vec{b}_1 + v_2\vec{b}_2 + \dots + v_p\vec{b}_p) = A(v_1\vec{b}_1) + A(v_2\vec{b}_2) + \dots + A(v_p\vec{b}_p) \\ &= v_1(A\vec{b}_1) + v_2(A\vec{b}_2) + \dots + v_p(A\vec{b}_p) \\ &= [A\vec{b}_1\ \ A\vec{b}_2\ \ \dots\ \ A\vec{b}_p]\,\vec{v} \end{aligned}$$

Def. Lad A være en $m\times n$-matrix og $B = [\vec{b}_1\ \vec{b}_2\ \dots\ \vec{b}_p]$ en $n\times p$-matrix. Matrixproduktet AB er $m\times p$-matricen

$$AB = [A\vec{b}_1\ \ A\vec{b}_2\ \ \dots\ \ A\vec{b}_p].$$

Bemærk: $(AB)\vec{v} = A(B\vec{v})$ for alle $\vec{v}\in\mathbb{R}^p$.

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{R}^n \arrow[dr, "A\cdot"] \\ \mathbb{R}^p \arrow[ur, "B\cdot"] \arrow[rr, "(AB)\cdot"'] & & \mathbb{R}^m \end{tikzcd}$$

$B\vec{v}$

$\vec{v}$ $\qquad$ $(AB)\vec{v} = A(B\vec{v})$

Bemærk: Huskeregel om formaterne

$$\underbrace{(m\times n)\cdot(q\times p)}_{n=q} = (m\times p)$$

Produktet er ikke defineret hvis $n\neq q$.

Eks:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \end{bmatrix} = \left[\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}\quad \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}\right] = \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ 9 & 11 \\ 13 & 17 \end{bmatrix}$$

"$(3\times 2)\cdot(2\times 2) = (3\times 2)$"

Sætning (række-søjle-reglen) Den (i,j)'te indgang i AB er

$$[AB]_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$$

Def. $[AB]_{ij} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \dots + a_{in} b_{nj}$.

række 1   søjle 2   indgang (1,2)

Eks: $$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\cdot(-1)+2\cdot 3 & 1\cdot 1+2\cdot 2 \\ 3\cdot(-1)+4\cdot 3 & 3\cdot 1+4\cdot 2 \\ 5\cdot(-1)+6\cdot 3 & 5\cdot 1+6\cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ 9 & 11 \\ 13 & 17 \end{bmatrix}$$

! **Bemærk:** I almindelighed er $AB \neq BA$.
Hvis $AB = BA$, så siges A og B at kommutere .

Eks: $$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \neq$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Sætning: For matricer A, B, C, P, Q af passende format haves følgende regneregler :

(1) $s(AC) = (sA)C = A(sC)$ for alle skalarer s.

(2) $A(CP) = (AC)P$ (associative lov)

(3) $(A+B)C = AC + BC$ (højre distributive lov)

(4) $C(P+Q) = CP + CQ$ (venstre distributive lov)

→ (5) $I_k A = A = A I_m$

(6) $(AC)^T = C^T A^T$.

Bevis for (6):
Hvis A er en $k \times m$ - matrix og C en $m \times n$ - matrix , så er $(AC)^T$ og $C^T A^T$ begge $n \times k$ - matricer OK.

$$[(AC)^T]_{ij} = [AC]_{ji} = \sum_{s=1}^{m} [A]_{js} [C]_{si} = \sum_{s=1}^{m} [C]_{si} [A]_{js}$$
$$= \sum_{s=1}^{m} [C^T]_{is} [A^T]_{sj} = [C^T A^T]_{ij}$$ q.e.d.

→ **Husk:** I_n er $n \times n$ - identitetsmatricen

$$I_1 = [1] \; , \; I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \; , \; I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} , \; \dots$$

Def. En $n \times n$-matrix A kaldes <u>inverterbar</u> (eller <u>invertibel</u>), hvis der findes en $n \times n$-matrix B så

$$AB = I_n \quad \text{og} \quad BA = I_n .$$

I givet fald er B entydigt bestemt og betegnes $B = A^{-1}$, den inverse matrix til A.

<u>Bevis for entydighed</u>:

Hvis $AB = BA = I_n$ og $AC = CA = I_n$, så er

$$B = BI_n = B(AC) = (BA)C = I_nC = C \qquad \text{q.e.d.}$$

<u>Bemærk</u>: Hvis A er inverterbar, har vi

$$A\vec{x} = \vec{b} \iff \vec{x} = A^{-1}\vec{b} .$$

(Bevis: $\Rightarrow$) $A^{-1}\cdot$, $\Leftarrow$) $A\cdot$ q.e.d.)

<u>Sætning</u>: Lad A og B være inverterbare $n \times n$-matricer. Så gælder

(1) A^{-1} er inverterbar med $(A^{-1})^{-1} = A$

(2) AB er inverterbar med $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

(3) A^T er inverterbar med $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

<u>Bevis</u>:

(1) $A^{-1}A = I_n$ og $AA^{-1} = I_n$

(2) $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AA^{-1} = I_n$ og tilsvarende $(B^{-1}A^{-1})(AB) = I_n$

(3) $A^T(A^{-1})^T = (A^{-1}A)^T = I_n^T = I_n$ og tilsvarende $(A^{-1})^T A^T = I_n$.

q.e.d.

Vi vil senere beskrive, hvordan man afgør, om en given matrix er inverterbar, og i bekræftende fald hvordan man beregner dens inverse matrix.

Def. En <u>elementær $n \times n$-matrix</u> E, er en matrix som er fremkommet ved at udføre en elementær rækkeoperation på I_n.

Eks.

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \Bigg| \quad \overset{-3r_2 \to r_2}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}, \quad \overset{4r_1 + r_3 \to r_3}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}}, \quad \overset{r_1 \leftrightarrow r_2}{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}$$

Sætning: Multiplikation med en elementær $m \times m$-matrix E fra venstre på en $m \times n$-matrix A, udfører den rækkeoperation, som dannede E fra I_m, direkte på A.

Eks. $$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 4a+g & 4b+h & 4c+i \end{bmatrix}$$

Sætning: Enhver elementær $m \times m$-matrix E er invertebar. Den inverse E^{-1} er elementærmatricen, der fremkommer ved at udføre den inverse rækkeoperation, af den som dannede E, på I_m.

Eks. $$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \overset{-4r_1 + r_3 \to r_3}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{bmatrix}}$$

Rækkereduktion og elementærmatricer

Lad A være en $m \times n$-matrix og lad R være dens RREF. Da findes en følge af elementære $m \times m$-matricer $E_1, E_2, E_3, \ldots, E_k$ så

$$A \to E_1 A \to E_2 E_1 A \to \ldots \to E_k E_{k-1} \ldots E_2 E_1 A = R.$$

Dvs. $R = FA$, hvor $F = E_k E_{k-1} \ldots E_2 E_1$. Bemærk at F er invertebar.