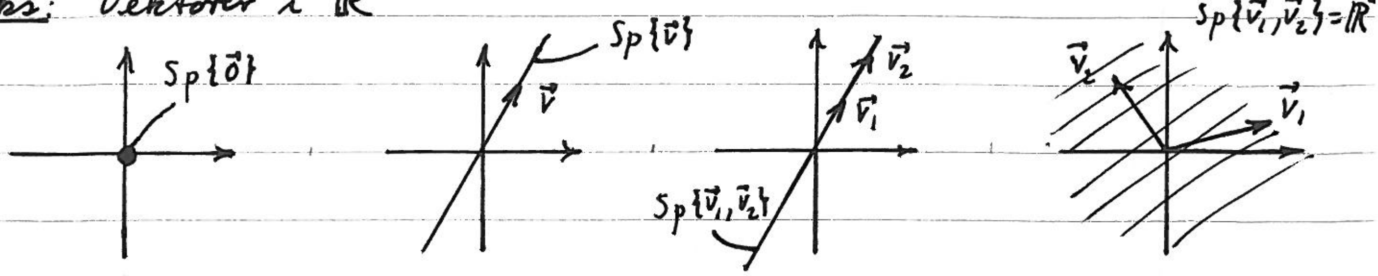
4. kursusgang : Repetition

Lad $S = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$ være en mængde af vektorer i $\mathbb{R}^m$.

Spandet af S :

$$Sp(S) = \{c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + \dots + c_n\vec{v}_n \mid c_1, c_2, \dots, c_n \in \mathbb{R}\}$$

Eks: Vektorer i $\mathbb{R}^2$



Lad A være $m \times n$-matricen $[\vec{v}_1 \ \vec{v}_2 \ \dots \ \vec{v}_n]$.

Sætning : For $\vec{v} \in \mathbb{R}^m$ gælder

$\vec{v} \in Sp(S) \Leftrightarrow [A \mid \vec{v}]$ totalmatrix for konsistent system.

Sætning : Følgende betingelser er ækvivalente

(1) $Sp(S) = \mathbb{R}^m$

(2) $A\vec{x} = \vec{b}$ konsistent for alle $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$.

(3) A's RREF har et pivot i hver række.

(4) $\text{rang}(A) = m$

Bemærk : $n < m \Rightarrow Sp(S) \neq \mathbb{R}^m$

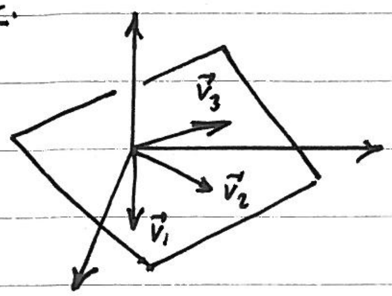
Def.: Vektorerne $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n \in \mathbb{R}^m$ siges at være lineært uafhængige såfremt ligningen

$$x_1\vec{v}_1 + x_2\vec{v}_2 + \dots + x_n\vec{v}_n = \vec{0}$$

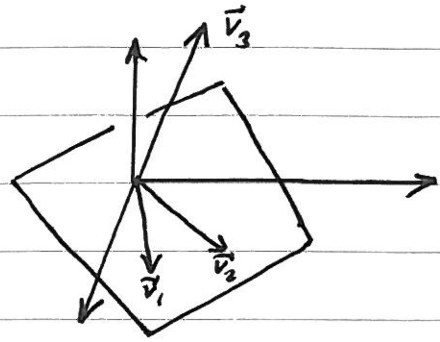
kun har løsningen $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$. Ellers kaldes vektorerne lineært afhængige.

__Sætning__: Vektorerne $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n \in \mathbb{R}^m$ er lineært afhængige hvis og kun hvis $\vec{v}_1 = \vec{0}$ eller der findes et $i \geq 2$ så $\vec{v}_i \in Sp\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_{i-1}\}$.

__Eks.__



lin. afh.



lin. uafh.

__Sætning__: Følgende betingelser er ækvivalente

(1) $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$ er lineært uafhængige.

(2) Systemet $A\vec{x} = \vec{0}$ har __ingen__ fri variabel.

(3) A's RREF har et pivot i hver søjle.

(4) $\text{rang}(A) = n$

__Bemærk__: $n > m \Rightarrow \vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n \in \mathbb{R}^m$ lineært afhængige

__Sætning__: For $\vec{v} \in \mathbb{R}^m$ gælder

$$Sp\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n, \vec{v}\} = Sp\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\}$$
$$\Updownarrow$$
$$\vec{v} \in Sp\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\}$$

Opgaverne:

"S is a generating set for $\mathbb{R}^m$" betyder $Sp(S) = \mathbb{R}^m$ altså at S udspænder $\mathbb{R}^m$.