6. kursusgang: Inverterbare matricer

(*) <u>Sætning</u>: Lad A være en $m \times n$-matrix og lad R være dens RREF. Da findes en inverterbar $m \times m$-matrix P så

$$PA = R.$$

<u>Bevis</u>: Ved rækkereduktionsalgoritmen findes elementære $m \times m$-matricer $E_1, E_2, \dots, E_k$ så

$$A \to E_1 A \to E_2 E_1 A \to \dots \to E_k E_{k-1} \dots E_2 E_1 A = R.$$

Dvs. $PA = R$, hvor $P = E_k E_{k-1} \dots E_2 E_1$. Da elementærmatricer er inverterbare, er P inverterbar. q.e.d.

<u>Husk</u>: Systemet $A\vec{x} = \vec{b}$ har samme løsningsmængde som systemet $R\vec{x} = \vec{c}$, hvor $[R \mid \vec{c}]$ er RREF for $[A \mid \vec{b}]$.
(Sætningen ovenfor kan bruges til at give et let bevis for dette resultat.)

Specielt har $A\vec{x} = \vec{0}$ samme løsningsmængde som $R\vec{x} = \vec{0}$.
Heraf følger:

<u>Søjle korrespondance princippet</u>

Hvis $j$te søjle i R er en linearkombination af andre søjler i R, så er $j$te søjle i A en linearkombination af de tilsvarende søjler i A med de samme vægte og vice versa.

<u>Eks.</u>

$$A = \begin{array}{cccccc} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 1 & 2 & 3 & 6 \\ 2 & 4 & -3 & 2 & 0 & 3 \\ -3 & -6 & 2 & 0 & 3 & 9 \end{bmatrix} \\ \vec{a}_1 \ \ \vec{a}_2 \ \ \vec{a}_3 \ \ \vec{a}_4 \ \ \vec{a}_5 \ \ \vec{a}_6 \end{array}$$

Man kan beregne RREF til

$$R = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \vec{r}_1 \ \ \vec{r}_2 \ \ \vec{r}_3 \ \ \vec{r}_4 \ \ \vec{r}_5 \ \ \vec{r}_6 \end{array}$$

OBS:
$\vec{r}_2 = 2\vec{r}_1$
$\vec{r}_5 = -\vec{r}_1 + \vec{r}_4$
$\vec{r}_6 = -5\vec{r}_1 - 3\vec{r}_3 + 2\vec{r}_4$

Dermed er
$\vec{a}_2 = 2\vec{a}_1$
$\vec{a}_5 = -\vec{a}_1 + \vec{a}_4$
$\vec{a}_6 = -5\vec{a}_1 - 3\vec{a}_3 + 2\vec{a}_4$.

Man kan bevise følgende:

Sætning: For enhver matrix A gælder:

(1) Pivot söjlerne i A er lineært uafhængige.

(2) Hver ikke-pivot söjle i A er en linearkombination af de foregående pivot söjler, hvor vægtene er koordinaterne i den tilhörende ikke-pivot söjle i R.

Invers matrix

! **Sætning**: En $n\times n$-matrix A er inverterbar hvis og kun hvis A's RREF er lig I_n.

Bevis:

$\Leftarrow$) Antag at A's RREF er lig I_n. Ved sætning ⊛ findes en inverterbar $n\times n$-matrix P så $PA = I_n$. Vi har

$$A = I_n A = (P^{-1}P)A = P^{-1}(PA) = P^{-1}I_n = P^{-1}$$

Så A er den inverse af en inverterbar matrix og dermed selv inverterbar OK.

$\Rightarrow$) Antag A er inverterbar. Da har vi

$$A\vec{x} = \vec{0} \Leftrightarrow A^{-1}A\vec{x} = A^{-1}\vec{0} \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{0}.$$

Så der er ingen fri variabel. Da A er en $n\times n$-matrix følger det at A's RREF er I_n. OK q.e.d.

! **Algoritme for invers matrix**

Lad A være en $n\times n$-matrix. Dan $n\times 2n$-matricen $[A|I_n]$. Hvis $[A|I_n]$ er rækkeækvivalent til $[I_n|C]$ for en $n\times n$-matrix C, så er A inverterbar med $A^{-1}=C$. Ellers er A ikke inverterbar.

Eks.

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 5 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[A\,|\,I_3] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{-r_1+r_3\to r_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_3}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[-4r_1+r_3\to r_3]{-2r_1+r_2\to r_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 1 & 5 & 0 & -4 \end{array}\right] \xrightarrow{-3r_2+r_3\to r_3}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -3 & 2 \end{array}\right]$$

Dvs. A er inverterbar og $A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & -3 & 2 \end{bmatrix}$.

(Bevis for algoritmen: Lad R være RREF for A. Vi har

$$[A \mid I_n] \to \dots \to [R \mid C],$$

så der findes en inverterbar matrix P således at

$$P[A \mid I_n] = [R \mid C].$$

Heraf fås $PA = R$ og $PI_n = P = C$ hvormed $CA = R$.

$R \neq I_n$: Så er A ikke inverterbar ved sætningen.

$R = I_n$: Så er A inverterbar ved sætningen og

$$CA = I_n \Rightarrow CAA^{-1} = I_n A^{-1} \Rightarrow C = A^{-1}. \quad \text{q.e.d.})$$

Algoritme til beregning af $A^{-1}B$

Lad A være en inverterbar $n\times n$-matrix og lad B være en $n\times p$-matrix. Rækkereducer $[A \mid B]$ til $[I_n \mid C]$. Da er $C = A^{-1}B$.

Sætning:

Lad A være en $n\times n$-matrix. Følgende udsagn er ækvivalente:

(1) A er inverterbar

(2) A's RREF er lig I_n

(3) $\operatorname{rang}(A) = n$

(4) A's søjler udspænder $\mathbb{R}^n$

(5) Systemet $A\vec{x} = \vec{b}$ er konsistent for alle $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$

(6) $\operatorname{nullitet}(A) = 0$

(7) A's søjler er lineært uafhængige

(8) Systemet $A\vec{x} = \vec{0}$ har kun løsningen $\vec{x} = \vec{0}$.

(9) Der findes en $n\times n$-matrix B så $BA = I_n$

(10) Der findes en $n\times n$-matrix C så $AC = I_n$

(11) A er et produkt af elementære matricer

(Bevis udeladt)

<u>Bemærk</u>: Lad A og C være $n \times n$-matricer.
Hvis $AC = I_n$ så er både A og C inverterbare med
$A^{-1} = C$ og $C^{-1} = A$.

(<u>Bevis</u>: Ved (10) fås at A er inverterbar. Vi har da at
$AC = I_n \Rightarrow A^{-1}AC = A^{-1}I_n \Rightarrow C = A^{-1}$.
Dermed er C også inverterbar og $C^{-1} = (A^{-1})^{-1} = A$. q.e.d.)