6. kursusgang : Repetition

A $\quad m \times n$ - matrix

B $\quad n \times p$ - matrix , $B = [\vec{b}_1 \ \vec{b}_2 \ \dots \ \vec{b}_p]$

Def. Produktet $A \cdot B$ er $m \times p$ - matricen

$$A \cdot B = [A\vec{b}_1 \ \ A\vec{b}_2 \ \ \dots \ \ A\vec{b}_p].$$

Der gælder

$$(AB)\vec{v} = A(B\vec{v}) \text{ for alle } \vec{v} \in \mathbb{R}^p.$$

Huskeregel om formaterne

$$(m \times n) \cdot (q \times p) = (m \times p)$$

$$n = q$$

Hvis $n \neq q$ er produktet ikke defineret.

Række - søjle - multiplikation

$$[A \cdot B]_{ij} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + a_{i3} b_{3j} + \dots + a_{in} b_{nj}$$

Eks :

$$\begin{bmatrix} 7 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 6 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 5 & -1 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 43 & -15 \\ 13 & 18 & 16 \end{bmatrix}$$

$2 \times \underline{3} \qquad \underline{3} \times 3 \qquad 2 \times 3$

Regneregler

$A(CP) = (AC)P$,

$(A+B)C = AC + BC$,

$C(P+Q) = CP + CQ$,

$I_k A = A = A I_m$,

$(AC)^T = C^T A^T$

Husk : Identitetsmatricen

$I_1 = [1]$, $I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, ...

I almindelighed er $AB \neq BA$.

Def. En $n \times n$-matrix A kaldes inverterbar (eller invertibel), hvis der findes en $n \times n$-matrix C så

$$AC = I_n \quad \text{og} \quad CA = I_n .$$

I bekræftende fald er C endydigt bestemt, og vi skriver $A^{-1} = C$.

Regneregler

Lad A og B være inverterbare $n \times n$-matricer. Så gælder

(1) A^{-1} er inverterbar med $(A^{-1})^{-1} = A$

(2) AB er inverterbar med $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

(3) A^T er inverterbar med $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

Def. En elementær $n \times n$-matrix E er en matrix som er fremkommet ved at udføre netop en elementær rækkeoperation på I_n.

Eks

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \Bigg| \quad \underset{3r_1 + r_3 \to r_3}{E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}}, \quad \underset{7r_2 \to r_2}{E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}, \quad \underset{r_1 \leftrightarrow r_2}{E_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}$$

Sætning: Multiplikation med en elementær $m \times m$-matrix E fra venstre på en $m \times n$-matrix A, udfører den rækkeoperation, som dannede E fra I_m, direkte på A.

Bemærk: Elementære matricer er inverterbare da elementære rækkeoperationer er inverterbare.

Eks.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \underset{-3r_1 + r_3 \to r_3}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \underset{\frac{1}{7}r_2 \to r_2}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{7} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}$$