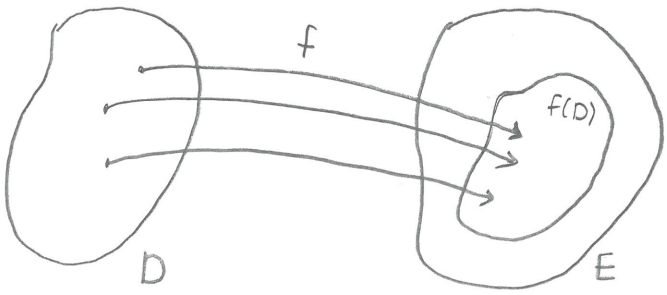
7. kursusgang: Lineære transformationer og deres matrixrepræsentation

Def. En <u>afbildning</u> $f : D \to E$ består af

- En mængde D kaldet <u>definitionsmængden</u>
- En mængde E kaldet <u>dispositionsmængden</u> (eller værdimængden)
- En forskrift der til ethvert $x \in D$ knytter netop ét $f(x) \in E$.

Def. <u>Billedmængden</u> for $f : D \to E$ er

$$f(D) = \{ f(x) \in E \mid x \in D \}.$$



Eks. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $f(x) = 3x^2 + 2x + 1$

Eks.

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \; ; \; f\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 + x_3 \\ x_1^2 \end{bmatrix}$$

Def. Lad A være en $m \times n$-matrix. Afbildningen

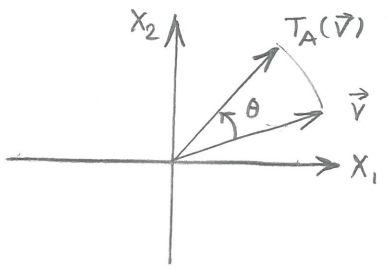
$$T_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \; ; \; T_A(\vec{x}) = A\vec{x}$$

kaldes <u>matrixtransformationen</u> hørende til A.

Eks. Rotationsmatricen

$$A = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

$$T_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \; ; \; T_A\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

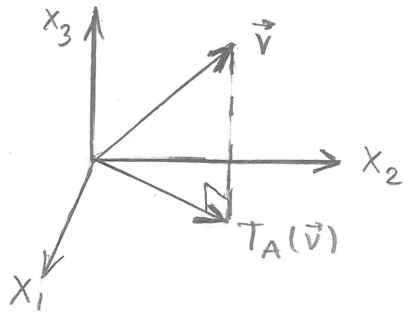


Billedmængden er

$$T_A(\mathbb{R}^2) = \mathbb{R}^2$$

Eks. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$$T_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \; ; \; T_A\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{bmatrix}$$



Ortogonal projektion på x_1x_2-planen.

Def. En afbildning $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ kaldes lineær såfremt

(I) $T(\vec{u} + \vec{v}) = T(\vec{u}) + T(\vec{v})$

(II) $T(c\vec{u}) = cT(\vec{u})$

for alle $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$ og $c \in \mathbb{R}$.

Sætning: Lad A være en $m \times n$-matrix. Da er matrixtransformationen $T_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ lineær.

Bevis:

(I) $T_A(\vec{u} + \vec{v}) = A(\vec{u} + \vec{v}) = A\vec{u} + A\vec{v} = T_A(\vec{u}) + T_A(\vec{v})$,

(II) $T_A(c\vec{u}) = A(c\vec{u}) = c(A\vec{u}) = cT_A(\vec{u})$.

q.e.d.

Sætning: Lad $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ være en lineær afbildning. Da gælder

(1) $T(\vec{0}) = \vec{0}$

(2) $T(a\vec{u} + b\vec{v}) = aT(\vec{u}) + bT(\vec{v})$ for alle $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$ og $a, b \in \mathbb{R}$.

(3) $T(a_1\vec{u}_1 + a_2\vec{u}_2 + \ldots + a_k\vec{u}_k) = a_1T(\vec{u}_1) + a_2T(\vec{u}_2) + \ldots + a_kT(\vec{u}_k)$

for alle $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_k \in \mathbb{R}^n$ og $a_1, a_2, \ldots, a_k \in \mathbb{R}$.

Bevis:

(1) $T(\vec{0}) = T(0\vec{u}) \overset{(II)}{=} 0\,T(\vec{u}) = \vec{0}$

(2) $T(a\vec{u} + b\vec{v}) \overset{(I)}{=} T(a\vec{u}) + T(b\vec{v}) \overset{(II)}{=} aT(\vec{u}) + bT(\vec{v})$

(3) $T(a_1\vec{u}_1 + a_2\vec{u}_2 + \ldots + a_k\vec{u}_k) \overset{(I)}{=} T(a_1u_1) + T(a_2\vec{u}_2 + \ldots + a_k\vec{u}_k) =$

$\ldots = T(a_1\vec{u}_1) + T(a_2\vec{u}_2) + \ldots + T(a_ku_k) \overset{(II)}{=}$

$a_1T(\vec{u}_1) + a_2T(\vec{u}_2) + \ldots + a_kT(\vec{u}_k)$.

q.e.d.

<u>Eks</u> $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $T(x) = 3x + 5$ er <u>ikke</u> lineær da $T(0) = 5 \neq 0$.

<u>Eks</u> $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $T(x) = 3x$ er lineær da
$T(u+v) = 3(u+v) = 3u + 3v = T(u) + T(v)$ og $T(cu) = 3cu = c \cdot 3u = cT(u)$.

<u>Eks.</u> Antag at $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ er lineær og at
$T\left(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}7\\2\end{bmatrix}$, $T\left(\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}-1\\3\end{bmatrix}$. Find forskriften for T.

$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix} = x_1\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} + x_2\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$ så

$$T\left(\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}\right) = T\left(x_1\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} + x_2\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right) \overset{(2)}{=} x_1 T\left(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right) + x_2 T\left(\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right)$$

$$= x_1\begin{bmatrix}7\\2\end{bmatrix} + x_2\begin{bmatrix}-1\\3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}7x_1 - x_2\\2x_1 + 3x_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}7 & -1\\2 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}.$$

! <u>Sætning</u>:
Lad $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ være en lineær transformation.
Da findes en entydig $m \times n$-matrix A så

$$T(\vec{x}) = A\vec{x} \quad \text{for alle } \vec{x} \in \mathbb{R}^n.$$

Denne matrix er givet ved

$$A = [\, T(\vec{e}_1) \;\; T(\vec{e}_2) \;\; \dots \;\; T(\vec{e}_n) \,],$$

hvor $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ er søjlevektorerne i I_n.

<u>Bevis</u>:

$\vec{x} = I_n \vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \dots + x_n\vec{e}_n$ så

$$T(\vec{x}) = T(x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \dots + x_n\vec{e}_n)$$

$$\overset{(3)}{=} x_1 T(\vec{e}_1) + x_2 T(\vec{e}_2) + \dots + x_n T(\vec{e}_n)$$

$$= [\, T(\vec{e}_1) \;\; T(\vec{e}_2) \;\; \dots \;\; T(\vec{e}_n) \,]\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix} = A\vec{x} \qquad \text{OK}$$

(Entydighed:
Lad $A = [\, \vec{a}_1 \;\; \vec{a}_2 \;\; \dots \;\; \vec{a}_n \,]$ og $B = [\, \vec{b}_1 \;\; \vec{b}_2 \;\; \dots \;\; \vec{b}_n \,]$ være $m \times n$-matricer. Antag at $T(\vec{x}) = A\vec{x}$ og $T(\vec{x}) = B\vec{x}$ for alle $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$. Da er

$$\vec{a}_j = A\vec{e}_j = T(\vec{e}_j) = B\vec{e}_j = \vec{b}_j \quad \text{for } j = 1, 2, \dots, n$$

så $A = B$.) q.e.d.

<u>Def.</u> Lad $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ være en lineær transformation. Matricen $A = [\, T(\vec{e}_1) \;\; T(\vec{e}_2) \;\; \dots \;\; T(\vec{e}_n) \,]$ kaldes <u>standard matricen</u> for T.