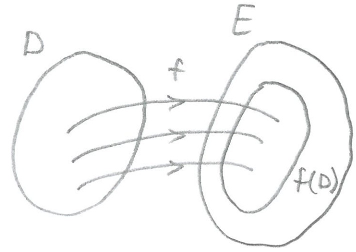
8. kursusgang: Inverterbare lineære transformationer

Lad $f: D \to E$ være en afbildning.



Husk: Billedmængden

$$f(D) = \{f(x) \in E \mid x \in D\}.$$

Def.

- f er *injektiv* (eller en-til-en) såfremt $u \neq v \Rightarrow f(u) \neq f(v)$
- f er *surjektiv* (eller på) såfremt $f(D) = E$
- f er *bijektiv* såfremt f både er injektiv og surjektiv.

Lad $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ være en lineær afbildning

Def. *Kernen* for T (eller nulrummet for T) er mængden

$$\mathrm{Ker}(T) = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid T(\vec{x}) = \vec{0}\}.$$

Sætning: T er injektiv hvis og kun hvis $\mathrm{Ker}(T) = \{\vec{0}\}$.

Bevis:

$\Rightarrow$) Antag T er injektiv. Da T er lineær er $T(\vec{0}) = \vec{0}$.
Idet $\vec{u} \neq \vec{0} \Rightarrow T(\vec{u}) \neq T(\vec{0}) = \vec{0}$ ser vi at $\mathrm{Ker}(T) = \{\vec{0}\}$.

$\Leftarrow$) Antag $\mathrm{Ker}(T) = \{\vec{0}\}$. Vi har

$$\vec{u} \neq \vec{v} \Rightarrow \vec{u} - \vec{v} \neq \vec{0} \Rightarrow T(\vec{u} - \vec{v}) \neq \vec{0} \Rightarrow T(\vec{u}) - T(\vec{v}) \neq \vec{0}$$
$$\Rightarrow T(\vec{u}) \neq T(\vec{v}).$$

q.e.d.

Bemærk: Hvis $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ er lineær med standard matrix $A = [\vec{a}_1\ \vec{a}_2\ \dots\ \vec{a}_n]$, så er billedmængden

$$T(\mathbb{R}^n) = Sp\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n\}$$

Bevis:

$$T(\mathbb{R}^n) = \{T(\vec{x}) \mid \vec{x} \in \mathbb{R}^n\} = \{A\vec{x} \mid \vec{x} \in \mathbb{R}^n\} =$$
$$\{x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + \dots + x_n\vec{a}_n \mid \vec{x} \in \mathbb{R}^n\} = Sp\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n\}$$

q.e.d.

__Eks.__ $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$; $T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 - x_2 + 2x_3 \\ -x_1 + x_2 - 3x_3 \end{bmatrix}$.

Da $T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ er T lineær med standard matrix $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -3 \end{bmatrix}$.

Billedmængden er

$$T(\mathbb{R}^3) = Sp\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix} \right\} \qquad (= \mathbb{R}^2)$$

Vi finder frembringere for nulrummet for T ved at løse ligningen $T(\vec{x}) = \vec{0} \Leftrightarrow A\vec{x} = \vec{0}$.

$$[A \mid \vec{0}] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & -3 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{r_1 + r_2 \to r_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{2r_2 + r_1 \to r_1}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{-r_2 \to r_2} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \end{array}$$

Den generelle løsning er

$$\begin{cases} x_1 = x_2 \\ x_2 \text{ fri} \\ x_3 = 0 \end{cases}. \qquad \text{På vektorform} \quad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_2 \\ 0 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \; x_2 \in \mathbb{R}$$

Dvs.

$$\mathrm{Ker}(T) = Sp\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \qquad (T \text{ ikke injektiv})$$

__Sætning__: Lad $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ være lineær med standard matrix A. Da gælder

(1) T er injektiv hvis og kun hvis A's søjler er lineært uafhængige (dvs. pivot position i hver søjle)

(2) T er surjektiv hvis og kun hvis A's søjler udspænder $\mathbb{R}^m$ (dvs. pivot position i hver række)

Bevis: Sæt $A = [\vec{a}_1 \ \vec{a}_2 \ \dots \ \vec{a}_n]$

(1) $T(\vec{x}) = \vec{0} \iff A\vec{x} = \vec{0} \iff x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + \dots + x_n\vec{a}_n = \vec{0}$.

Så $\mathrm{Ker}(T) = \{\vec{0}\}$ hvis og kun hvis $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ er lineært uafhængige.

(2) Da $T(\mathbb{R}^n) = \mathrm{Sp}\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n\}$ fås resultatet. q.e.d.

Def. Lad $f : D \to E$ og $g : E \to F$ være afbildninger. Den sammensatte afbildning $g \circ f$ er defineret som

$$g \circ f : D \to F \ ; \ (g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

Sætning: Lad $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ og $U : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$ være lineære med standard matricer A og B henholdsvis. Da er $U \circ T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ lineær med standard matrix BA.

Bevis:

$$(U \circ T)(\vec{x}) = U(T(\vec{x})) = U(A\vec{x}) = B(A\vec{x}) = (BA)\vec{x} = T_{BA}(\vec{x})$$

q.e.d.

Def. Lad $f : D \to E$ være en afbildning. Hvis der findes en afbildning $g : E \to D$ så

$$(g \circ f)(x) = x \quad \text{og} \quad (f \circ g)(y) = y$$

for alle $x \in D$ og $y \in E$, så siges f at være inverterbar med invers $f^{-1} = g$.

(Bemærk:

- Hvis f er inverterbar, er den inverse entydigt bestemt.
- f er inverterbar hvis og kun hvis f er bijektiv.)

Sætning: Lad $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ være lineær med standard matrix A. Da er T inverterbar hvis og kun hvis A er inverterbar og i bekræftende fald er T^{-1} lineær med standard matrix A^{-1}.

<u>Bevis</u>: $\Leftarrow$) Antag at A er inverterbar. Vi har $T = T_A$. Idet

$$(T_{A^{-1}} \circ T_A)(\vec{x}) = T_{A^{-1}}(T_A(\vec{x})) = T_{A^{-1}}(A\vec{x}) = A^{-1}A\vec{x} = \vec{x}$$

og tilsvarende $(T_A \circ T_{A^{-1}})(\vec{y}) = \vec{y}$, fås at T er inverterbar med $T^{-1} = T_{A^{-1}}$. Specielt er T^{-1} en matrixtransformation og dermed lineær.

$\Rightarrow$) Antag at T er inverterbar. Da $T(T^{-1}(\vec{x})) = \vec{x}$ er $T(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n$ så T er surjektiv. Dermed har A en pivot position i hver række, og da A er en $n \times n$-matrix, følger det at A er inverterbar. q.e.d.