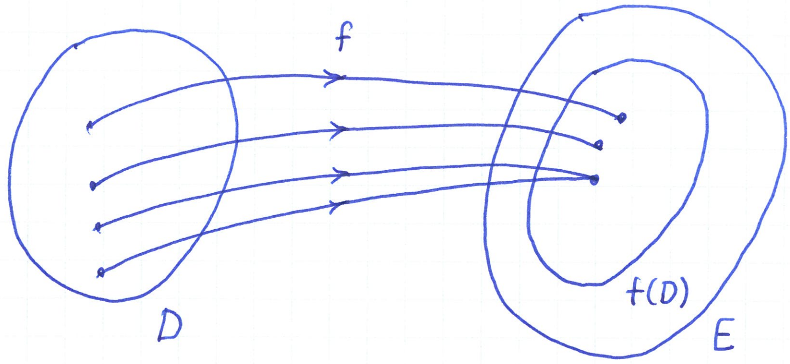
8. kursusgang: Repetition

Def. En <u>afbildning</u> (eller funktion) $f : D \to E$ består af

- En mængde D kaldet <u>definitionsmængden</u> (eng. domain)
- En mængde E kaldet <u>dispositionsmængden</u> (eller værdimængden) (eng. codomain)
- En <u>forskrift</u> der til ethvert $x \in D$ knytter <u>netop ét</u> $f(x) \in E$

Def. <u>Billedmængden</u> (eng. range) for $f : D \to E$ er

$$f(D) = \{ f(x) \in E \mid x \in D \}.$$



Eks.

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \; ; \; f(x) = \sin(x)$$

$$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \; ; \; g\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x^2 - y \\ 2xy \\ x + y \end{bmatrix}$$

Matrixtransformationen hørende til en $m \times n$-matrix A

$$T_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \; ; \; T_A(\vec{x}) = A\vec{x}$$

Nul-transformationen

$$T_0 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \; ; \; T_0(\vec{x}) = \vec{0} \qquad (\text{matrix } 0)$$

Identitetstransformationen

$$I : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \; ; \; I(\vec{x}) = \vec{x} \qquad (\text{matrix } I_n)$$

Def. En afbildning $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ kaldes **lineær** såfremt

(I) $T(\vec{u}+\vec{v}) = T(\vec{u}) + T(\vec{v})$

(II) $T(c\vec{u}) = cT(\vec{u})$

for alle $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$ og $c \in \mathbb{R}$.

Sætning: Matrixtransformationer er lineære.

Eks. $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$; $T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -x_1 + 2x_2 \\ 3x_1 \end{bmatrix}$ er lineær da
$T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$.

Sætning: Lad $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ være lineær. Da gælder

(1) $T(\vec{0}) = \vec{0}$

(2) $T(a_1\vec{u}_1 + a_2\vec{u}_2 + \dots + a_k\vec{u}_k) = a_1T(\vec{u}_1) + a_2T(\vec{u}_2) + \dots + a_kT(\vec{u}_k)$

Sætning: Lad $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ være en lineær afbildning. Da findes en entydig $m \times n$-matrix A så

$$T(\vec{x}) = A\vec{x} \quad \text{for alle } \vec{x} \in \mathbb{R}^n.$$

Denne matrix (kaldet standard matricen for T) er givet ved

$$A = [\,T(\vec{e}_1) \;\; T(\vec{e}_2) \;\; \dots \;\; T(\vec{e}_n)\,]$$

hvor $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ er søjlevektorerne i I_n.